Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

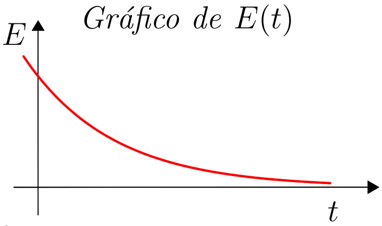
Cálculo I

Prova 1 - 2.º/2003 - 22/09/2003

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1, a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta a caneta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a $0,5$ ou a $-0,5$, conforme a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco, com marcação rasurada ou com dupla marcação terão valor igual a zero.

1) Suponha que, em um ambiente com capacidade de sustentar um número limitado de indivíduos, a população $P(t)$ seja modelada pela função $P(t) = \dfrac{1100}{1 + 9\,E(t)}$, em que $E(t) = 3^{-t}$ é uma função exponencial, o tempo $t \geqslant 0$ é medido em anos e $t = 0$ corresponde à população inicial $P(0)$. O gráfico da função $E(t)$, ilustrado na figura abaixo, pode ser útil no estudo do comportamento de $P(t)$.



| C | E | a) A população inicial é superior a 100 indivíduos.

| C | E | b) A função $f(t) = 1 + 9\,E(t)$ é tal que $f(t_1) < f(t_2)$ sempre que $t_1 < t_2$.

| C | E | c) $P(t)$ é uma função decrescente da variável t

| C | E | d) A população supera 800 indivíduos antes do início do terceiro ano.

| C | E | e) Com o passar dos anos, a população tende a se estabilizar em um número inferior a 1000 indivíduos.

2) Suponha que, a uma temperatura de $t_0 = 25\ {}^0$C, uma barra de alumínio tenha o comprimento de 10 cm. Suponha ainda que o comprimento $c(t)$ da barra varie com a temperatura t de acordo com a função $c(t) = 10 + 10^{-4} \times (t - t_0)$. Nesse caso, $\left| t - t_0 \right|$ é dita a variação da temperatura e $\left| c(t) - c(t_0) \right|$ é a correspondente variação do comprimento. Além disso, para $t \neq t_0$, o quociente $\dfrac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$ é a taxa média de variação do comprimento.

a) Obtenha uma estimativa para a variação do comprimento correspondente a uma variação da temperatura menor ou igual a $5\ {}^0$C.

Resposta:

b) Determine uma variação positiva na temperatura de forma que a correspondente variação do comprimento seja inferior a $0,0005$ cm.

Resposta:

c) Calcule a taxa instantânea $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$.

Resposta:

d) Determine a unidade de medida da taxa instantânea de variação do comprimento.

Resposta:

3) Em um determinado processador, a quantidade de x Gb de dados, com $x \leqslant 10$, é processada em $T(x) = 2\,x + 280$ segundos. Para uma quantidade $x > 10$ Gb, o tempo de processamento é igual a $T(x) = K(x^2 - 10^2) + 300$ segundos, em que K é uma constante positiva. Isso define a função $T\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, em que $T(x)$ é o tempo de processamento de uma quantidade x de dados.

a) Calcule os limites laterais $\lim\limits_{x \to 10^-} T(x)$ e $\lim\limits_{x \to 10^+} T(x)$.

b) Determine a imagem da função $T(x)$.

c) Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 10^+} \dfrac{T(x) - T(10)}{x - 10}$.

d) Determine o valor de K para o qual a função $T(x)$ é derivável em $x = 10$.

4) No estudo da produtividade de uma fábrica, suponha que a quantidade de bens produzidos possa ser modelada, em função do número x de empregados, por uma função derivável $p(x)$, em que $p(x)$ é medida em milhares e x em centenas. A produtividade média por empregado é então dada pela função $M(x) = \dfrac{p(x)}{x}$, e pode-se mostrar que o número x_0 de empregados que maximiza a função $M(x)$ é aquele para o qual $M'(x_0) = 0$.

a) Usando as regras de derivação, calcule $M'(x)$ em termos da derivada $p'(x)$.

b) Use o item anterior para justificar a afirmação de que $M'(x_0) = 0$ se, e somente se, $p'(x_0) = M(x_0)$.

c) Calcule $p'(x)$ supondo que $p(x) = \dfrac{2\,x^2}{x^2 + 1}$.

d) Determine o número de empregados que maximiza a produtividade média da fábrica.