Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

Prova 1 - 2.^{o}/2003 - 22/09/2003

– Gabarito –

1) Suponha que, em um ambiente com capacidade de sustentar um número limitado de indivíduos, a população $P(t)$ seja modelada pela função $P(t) = \dfrac{1100}{1 + 9\,E(t)}$, em que $E(t) = 3^{-t}$ é uma função exponencial, o tempo $t \geqslant 0$ é medido em anos e $t = 0$ corresponde à população inicial $P(0)$. O gráfico da função $E(t)$, ilustrado na figura abaixo, pode ser útil no estudo do comportamento de $P(t)$.

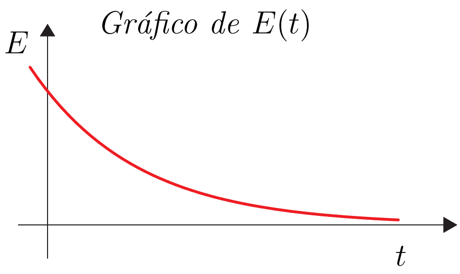
Observação: os items dessa questão diferiam de prova para prova, e segue uma solução que responde a todos eles.

a) Sobre a população inicial.

Solução: como $E(0) = 3^0 = 1$, segue-se que

$$P(0) = \frac{1100}{1 + 9\,E(0)} = 110.$$

Assim, a população inicial é *superior* a 100 indivíduos.



b) Sobre o comportamento da função $f(t) = 1 + 9\,E(t)$.

Solução: do gráfico da função $E(t)$ segue-se que ela é decrescente, isto é, $E(t_1) > E(t_2)$ sempre que $t_1 < t_2$. É claro então que a função $f(t)$ tem o mesmo comportamento, isto é, $f(t_1) > f(t_2)$ sempre que $t_1 < t_2$.

c) Sobre o comportamento da função $P(t)$.

Solução: do item anterior, segue-se que $\dfrac{1}{f(t_1)} < \dfrac{1}{f(t_2)}$ sempre que $t_1 < t_2$. Multiplicando essa desigualdade por 1100, obtém-se que $P(t)$ é uma função *crescente*.

d) Sobre o instante em que a população supera 800 indivíduos.

Solução: o primeiro, o segundo e o terceiro ano correspondem, respectivamente, aos intervalos $[0, 1)$, $[1, 2)$ e $[2, 3)$. Em particular, o início do terceiro ano corresponte a $t = 2$. Calculando, obtém-se que $P(2) = 550$. Logo, como $P(t)$ é crescente, a população supera 800 indivíduos *depois* do início do terceiro ano.

e) Sobre o comportamento de $P(t)$ para valores grandes de t.

Solução: a função exponencial $E(t)$ é tal que $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$. Logo, usando as propriedades do limite, segue-se que $\lim_{t\to\infty} P(t) = 1100$. Assim, com o passar dos anos, a população tende a se estabilizar em torno de 1100, um número *superior* a 1000 indivíduos.

2) Suponha que, a uma temperatura de t_0 ^{0}C, uma barra tenha o comprimento de 10 cm. Suponha ainda que o comprimento $c(t)$ da barra varie com a temperatura t de acordo com a função $c(t) = 10 + 10^{-a} \times (t - t_0)$. Nesse caso, $\left| t - t_0 \right|$ é dita a variação da temperatura e $\left| c(t) - c(t_0) \right|$ é a correspondente variação do comprimento. Além disso, para $t \neq t_0$, o quociente $\dfrac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$ é a taxa média de variação do comprimento.

Observação: nessa questão, os valores de t_0 e de a diferiam de prova para prova, e segue uma solução que responde a todos os casos.

a) Obtenha uma estimativa para a variação do comprimento correspondente a uma variação da temperatura menor ou igual a 5 ^{0}C.

Resposta: $\left| c(t) - c(t_0) \right| \leqslant 10^{-a} \times 5.$

Solução: como $c(t) = c(t_0) + 10^{-a} \times (t - t_0)$, segue-se que $\left| c(t) - c(t_0) \right| = 10^{-a} \times \left| t - t_0 \right|$. Em particular, se $\left| t - t_0 \right| \leqslant 5$, então $\left| c(t) - c(t_0) \right| \leqslant 10^{-a} \times 5$.

b) Determine uma variação positiva na temperatura de forma que a correspondente variação do comprimento seja inferior a $0,0005$ cm.

Resposta: $\left| t - t_0 \right| \leqslant 10^{a} \times 0,0005$

Solução: da igualdade $\left| c(t) - c(t_0) \right| = 10^{-a} \times \left| t - t_0 \right|$, para que $\left| c(t) - c(t_0) \right| \leqslant 0,0005$ basta que $\left| t - t_0 \right| \leqslant 10^{a} \times 0,0005$.

c) Calcule a taxa instantânea $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$.

Resposta: $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} = 10^{-a}$

Solução: basta notar que, da expressão da função $c(t)$, segue-se que o quociente $\dfrac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$ é constante e igual a 10^{-a}. Assim, o limite desse quociente é também igual a 10^{-a}.

d) Determine a unidade de medida da taxa instantânea de variação do comprimento.

Resposta: centímetro por graus Celcius

Solução: a taxa instantânea é o limite das taxas médias de variação do comprimento quanto $t \to t_0$. Como a unidade de medida das taxas médias é cm/ ^{0}C, segue-se que esta é também a unidade de medida da taxa instantânea

3) Em um determinado processador, a quantidade de x Gb de dados, com $x \leqslant 10$, é processada em $T(x) = 2\,x + 280$ segundos. Para uma quantidade $x > 10$ Gb, o tempo de processamento é igual a $T(x) = K(x^2 - 10^2) + 300$ segundos, em que K é uma constante positiva. Isso define a função $T\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, em que $T(x)$ é o tempo de processamento de uma quantidade x de dados.

a) Calcule os limites laterais $\lim_{x \to 10^-} T(x)$ e $\lim_{x \to 10^+} T(x)$.

Solução: para $x < 10$, tem-se $T(x) = 2\,x + 280$, e portanto $\lim_{x \to 10^-} T(x) = 2 \times 10 + 280 = 300$. Para $x > 10$, tem-se $T(x) = K(x^2 - 10^2) + 300$, onde $x^2 - 10^2 \to 0$ quanto $x \to 10^+$. Usando as propriedades do limite, segue-se que $\lim_{x \to 10^+} T(x) = K\,0 + 300 = 300$. Resumindo, tem-se

$$\lim_{x \to 10^-} T(x) = \lim_{x \to 10^+} T(x) = 300.$$

b) Determine a imagem da função $T(x)$.

Solução: como $T(10) = 300$, do item anterior segue-se que $T(x)$ é contínua em $x = 10$. É claro que a função é contínua nos demais pontos de seu domínio, e portanto $T\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Além disso, das expressões de $T(x)$, segue-se que $280 = T(0) \leqslant T(x)$ e $\lim_{x \to \infty} T(x) = \infty$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, segue-se que a imagem da função é todo o intervalo $[280, \infty)$.

c) Calcule o limite $\lim_{x \to 10^+} \dfrac{T(x) - T(10)}{x - 10}$.

Solução: como $T(10) = 300$ e $T(x) = K(x^2 - 10^2) + 300$ para $x > 10$, segue-se que, para esses valores de x,

$$\frac{T(x) - T(10)}{x - 10} = \frac{K(x^2 - 10^2)}{x - 10} = K(x + 10).$$

Dessa igualdade é então claro que $\lim_{x \to 10^+} \dfrac{T(x) - T(10)}{x - 10} = K \times 20$

d) Determine o valor de K para o qual a função $T(x)$ é derivável em $x = 10$.

Solução: de forma análoga à do item anterior, conclui-se que $\lim_{x \to 10^-} \dfrac{T(x) - T(10)}{x - 10} = 2$. Assim, para que $T(x)$ seja derivável em $x = 10$, deve-se ter

$$2 = \lim_{x \to 10^-} \frac{T(x) - T(10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} \frac{T(x) - T(10)}{x - 10} = 20\,K,$$

de onde segue-se que $K = \dfrac{1}{10}$.

4) No estudo da produtividade de uma fábrica, suponha que a quantidade de bens produzidos possa ser modelada, em função do número x de empregados, por uma função derivável $p(x)$, em que $p(x)$ é medida em milhares e x em centenas. A produtividade média por empregado é então dada pela função $M(x) = \dfrac{p(x)}{x}$, e pode-se mostrar que o número x_0 de empregados que maximiza a função $M(x)$ é aquele para o qual $M'(x_0) = 0$.

a) Usando as regras de derivação, calcule $M'(x)$ em termos da derivada $p'(x)$.

Solução: usando a regra de derivação do quociente, obtém-se que

$$M'(x) = \frac{p'(x)\,x - p(x)}{x^2}$$

b) Use o item anterior para justificar a afirmação de que $M'(x_0) = 0$ se, e somente se, $p'(x_0) = M(x_0)$.

Solução: do item anterior, segue-se que $M'(x_0)$ se anula apenas nos ponto x_0 em que $p'(x_0)\,x_0 - p(x_0) = 0$. Essa última igualdade, por sua vez, é equivalente a

$$p'(x_0) = \frac{p(x_0)}{x_0} = M(x_0),$$

o que fornece a justificativa solicitada.

c) Calcule $p'(x)$ supondo que $p(x) = \dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$.

Solução: usando novamente a regra do quociente, obtém-se que

$$p'(x) = \frac{4\,x(x^2+1) - 2\,x(2\,x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4\,x}{(x^2+1)^2}$$

d) Determine o número de empregados que maximiza a produtividade média da fábrica.

Solução: dos itens anteriores segue-se que o número x_0 de empregados que maximiza a produtividade média é aquele para o qual

$$\frac{4\,x_0}{(x_0^2+1)^2} = p'(x_0) = \frac{p(x_0)}{x_0} = \frac{2\,x_0}{x_0^2+1}.$$

Resolvendo, obtém-se $x_0 = 1$. Assim, o número de empregados que maximiza a produtividade média é igual a uma centena.