Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

2.^{a} Prova - 1.^{o}/2000 - 29/05/00

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

1) Suponha que a relação entre o comprimento L, em metros, e o peso P, em kg, de um determinado peixe seja dada por $P(L) = 10L^3$. Suponha ainda que a taxa de variação do comprimento em relação ao tempo, dado em anos, satisfaz à equação $\dfrac{d}{dt}L(t) = 0,2\,(2-L(t))$.

(a) Determine o comprimento do peixe no caso em que $P = 20$ kg.

(b) Determine a taxa de variação do peso em relação ao tempo.

(c) Use os itens anteriores para determinar a taxa de variação do peso do peixe, em relação ao tempo, para um peixe de 20 kg.

2) Indicando por $\theta(t)$ o ângulo, em função do tempo, que um pêndulo faz com a vertical, mostra-se que essa função satisfaz à equação $\theta''(t) = -\omega^2\,\theta(t)$, para alguma constante ω.

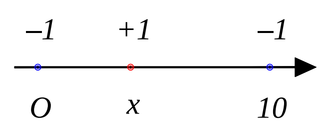
(a) Verifique que as funções $\cos(\omega t)$ e $\mathrm{sen}(\omega t)$ satisfazem à equação acima.

(b) Verifique que, se $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ são soluções da equação dada, então, para quaisquer constantes a e b, $a\,\theta_1(t) + b\,\theta_2(t)$ também é solução.

(c) Use os itens anteriores para obter uma solução $\theta(t)$ da equação que satisfaz $\theta(0) = 2$ e $\theta'(0) = 1$.

3) Considere duas partículas de carga -1 localizadas sobre uma reta orientada, uma na origem e a outra no ponto de coordenada 10. Segundo a lei de Coulomb, se uma terceira partícula de carga +1 for colocada na posição $x \in (0, 10)$ dessa reta, a força resultante sobre essa partícula é dada por

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-10)^2}$$



onde k é uma constante positiva que depende do meio.

(a) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento da função F.

(b) Determine os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para baixo e côncavo para cima.

(c) Calcule os limites laterais de F, à direita na origem e à esquerda no ponto 10.

(d) Esboce o gráfico da função F considerando $k = 1$.

4) Deseja-se cortar um arame de comprimento 1 metro em dois pedaços, para formar com um deles um círculo e com o outro um quadrado. Denote por x o comprimento do pedaço de arame com o qual se formará o círculo.

(a) Determine, em função de x, a soma das áreas das figuras obtidas.

(b) Determine os extremos locais da função do item (a), classificando-os como máximos ou mínimos locais.

(c) Determine o máximo e o mínimo absolutos da função do item (a) no intervalo $[0, 1]$.