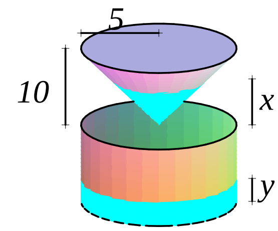
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

2.^{a} Prova - 1.^{o}/2001 - 28/05/2001

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

1) Um filtro na forma de um cone circular reto tem altura igual a 10 cm e raio da base igual a 5 cm. Suponha que uma certa quantidade de água seja colocada nesse filtro e que ela escoe para um recipiente na forma de um cilindro circular reto de mesmo raio e altura que o filtro, conforme ilustra a figura abaixo. Indique por x a altura da água no filtro e por y a altura da água no recipiente.



a) Sendo r o raio da superfície da água no filtro, use semelhança de triângulos para determinar r em função de x.

b) Sabendo que o volume de um cone circular reto de raio r e altura x é igual a $(1/3)\pi r^2 x$, determine o volume $V_1(x)$ da água no filtro como função de x.

c) Indicando por $V_2(y)$ o volume de água no recipiente cilíndrico e considerando que $x = x(t)$ e $y = y(t)$, use o fato de que $\frac{d}{dt}V_2(y(t)) = -\frac{d}{dt}V_1(x(t))$, para determinar $y'(t)$ no instante em que $x(t) = 5$ e $x'(t) = -0.5$.

2) Suponha que o número de milhares de pessoas infectadas por um vírus seja modelado pela função $N(t) = -2t^3 + at^2 + bt + c$, em que a, b e c são constantes e o tempo t é medido em anos. Suponha ainda que, no instante $t = 0$, nove mil pessoas estavam infectadas, um ano depois esse número atingiu um valor mínimo e, em seguida, cresceu até atingir um valor máximo para $t = 2$.

a) Determine as constantes a, b e c a partir das informações dadas.

b) Determine o número de pessoas infectadas 1, 2 e 3 anos depois do instante $t = 0$.

c) Determine a concavidade de $N(t)$ e, em seguida, esboce o seu gráfico para $t \in [0, 3]$.

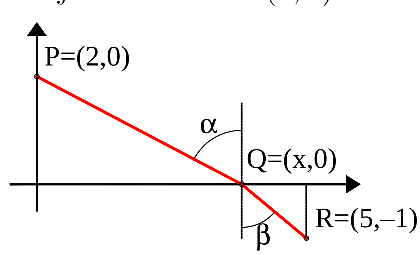
3) Considere que, para o tempo t entre 0 e 2π, a distância $s(t)$, em relação a origem, de um objeto que se desloca sobre uma reta seja igual a $s(t) = 3 + 2sen(t) + cos(2t)$.

a) Determine os pontos críticos de $s(t)$ caracterizando-os como sendo de máximo ou de mínimo local.

b) Verifique que o objeto esteve parado em algum momento entre os instantes $5\pi/4$ e $7\pi/4$.

c) Determine o instante em que o objeto está mais próximo e o que ele está mais afastado da origem.

4) Pelo *Princípio de Fermat*, a luz se propaga segundo a trajetória de tempo mínimo. Suponha que a velocidade da luz no ar seja v_1, na água seja v_2, e que um raio de luz percorra a trajetória de $P = (0, 2)$ a $R = (5, -1)$ passando por $Q = (x, 0)$, conforme figura.



a) Para cada x no intervalo $[0, 5]$, determine os tempos $T_1(x)$ e $T_2(x)$ de trânsito da luz ao longo dos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$, respectivamente.

b) Indicando por $T(x)$ o tempo total, calcule a derivada $T'(x)$.

c) Verifique que, se α e β representam os ângulos correspondentes ao valor $x = x_0$ para o qual $T'(x_0) = 0$, então $sen(\alpha)/v_1 = sen(\beta)/v_2$.