Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

2.ª Prova - 1.º/2002 - 05/08/2002

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1 a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a 0.5 ou a -0.5, segundo a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco terão valor igual a zero.

1) Suponha que, ao preço de R$ 1,00 por lata, uma loja vende 500 latas de refrigerante por semana, sendo que o custo unitário é de R$ 0,60. Para cada centavo que a loja reduza no preço, a quantidade vendida aumenta de 25 latas. Indicando por x o número de centavos que são reduzidos no preço de cada lata, sejam $T(x)$ e $L(x)$, respectivamente, o valor total da venda e o lucro total obtido semanalmente com a venda das latas.

| C | E | a) Retirando-se x centavos do preço de cada lata, o número de latas vendidas semanalmente é igual a $500 + 25x$.

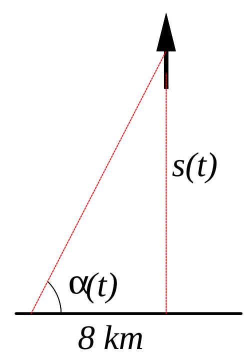
| C | E | b) $T(x) = (1 - 0,01x)(500 + 25x)$.

| C | E | c) O lucro semanal obtido quando são reduzidos 8 centavos do preço de cada lata é inferior a R$ 220,00.

| C | E | d) A função $L(x)$ possui dois pontos críticos.

| C | E | e) O preço de venda de cada lata de refrigerante para que o lucro semanal seja máximo é inferior a R$ 0,95.

2) Um foguete é lançado verticalmente de um ponto que está a 8 km de um observatório e à mesma altura deste, conforme ilustra a figura abaixo. Suponha que o ângulo de elevação $\alpha(t)$, medido em graus, esteja variando a uma taxa constante de 2° por segundo. Lembre-se que o cosseno de 30° é igual a $\sqrt{3}/2$, e indique a medida do ângulo $\alpha(t)$ em radianos por $\theta(t)$.



a) Determine o espaço percorrido pelo foguete no instante em que $\alpha(t) = 30^\circ$.

Resposta:

b) Usando que 360° corresponde a 2π radianos, obtenha a medida $\theta(t)$ em função da medida $\alpha(t)$.

Resposta:

c) Obtenha o espaço percorrido $s(t)$ pelo foguete até o instante t em termos da tangente e da medida $\theta(t)$ do ângulo de elevação.

Resposta:

d) Determine a velocidade do foguete no instante em que $\theta(t) = \pi/6$ radianos.

Resposta:

3) Segundo o modelo de Ward-Smith, a potência P necessária para o vôo horizontal de uma gaivota depende de sua velocidade v, e é dada pela função

$$P(v) = K_1\, v^3 + \frac{K_2}{v}$$

em que $v > 0$ e K_1 e K_2 são constantes positivas que dependem da densidade do ar, da área das asas, do peso do pássaro etc. Em longos percursos, as gaivotas voam à velocidade que minimiza a potência necessária. Suponha que, em unidades apropriadas de medidas, $K_1 = 1$ e $K_2 = 3$.

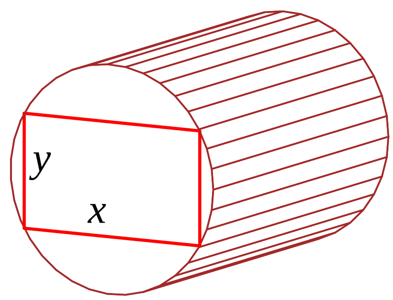
a) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento de P.

b) Determine os intervalos em que o gráfico de P é côncavo para baixo e os que é côncavo para cima.

c) Calcule os limites $\lim\limits_{v\to 0^+} P(v)$ e $\lim\limits_{v\to\infty} P(v)$, e esboçe o gráfico de P no domínio $(0, \infty)$.

d) Determine a velocidade v_0 que é utilizada pelas gaivotas em vôos de longa distância.

4) Suponha que uma viga retangular, de largura x e altura y, deva ser cortada de um cilíndro de seção circular de raio a, como ilustra a figura abaixo. A resistência R dessa viga é diretamente proporcional ao produto de sua largura x pelo quadrado de sua altura y. Indique por K a constante de proporcionalidade e observe que a altura $y = y(x)$ pode ser obtida a partir da largura x, e portanto a resistência $R = R(x)$ pode ser expressa apenas em função de x.



a) Determine a expressão de $y = y(x)$ em termos de x.

b) Obtenha a expressão da resistência $R = R(x)$ como função de x.

c) Determine os pontos críticos de $R(x)$ no domínio $(0, 2a)$, classificando-os como de mínimo local, máximo local ou de inflexão.

d) Determine o valor máximo da resistência que pode ser obtido entre as vigas cortadas do cilindro.