Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

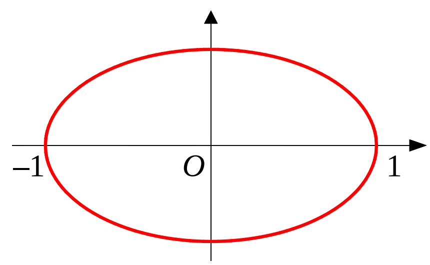
Cálculo I

Prova 2 - 2.º/2002 - 20/12/2002

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1 a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a 0.5 ou a -0.5, segundo a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco terão valor igual a zero.

1) Em um sistema de coordenadas de origem $O = (0,0)$, o gráfico da equação $x^2 + 4\,y^2 = 1$ é uma elipse, conforme ilustra a figura abaixo. Suponha que essa equação defina implicitamente um função derivável $y = f(x)$ para $x \in (-1,1)$, e denote por L_0 a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.



C | E a) Tem-se necessariamente que $\left|f(1/2)\right| = \sqrt{3}/4$.

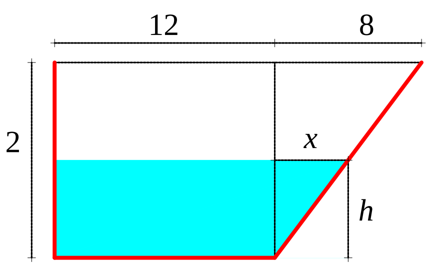
C | E b) Calculando implicitamente a derivada, obtém-se que $f'(x)$ não muda de sinal para $x \in (-1,1)$.

C | E c) A equação de L_0 pode ser escrita na forma $x_0 x + 4 f(x_0) y = 1$.

C | E d) Não existe o limite $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x)$.

C | E e) Para algum ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ com $x_0 \in (0,1)$, o segmento OP_0 é ortogonal à reta L_0.

2) Suponha que um reservatório de água tenha corte vertical na forma de um trapézio com as medidas em metros indicadas na figura abaixo. Suponha ainda que a vista superior do reservatório seja um retângulo de lados medindo 20 m e 10 m.



a) Determine o volume total do reservatório.

Resposta:

b) Obtenha uma equação que relaciona as medidas x e h indicadas na figura.

Resposta:

c) Obtenha o volume V de água no reservatório em função da altura h.

Resposta:

d) Supondo que o reservatório esteja sendo abastecido com água a um fluxo de 50 L/min, segue que a altura h é uma função do tempo $h(t)$. Supondo ainda que $h(0) = 0$, determine a taxa de variação de $h(t)$ no instante t_0 em que $h(t_0) = 1$.

Resposta:

3) Suponha que em uma reserva ecológica, por um período de 12 meses, o número de gaviões e de ratos sejam dados, respectivamente, pelas funções

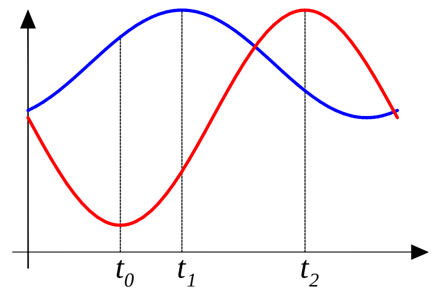
$$G(t) = 90 - 20\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\,t\right) \quad \text{e} \quad R(t) = 100 + 10\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\,t - \frac{\pi}{3}\right)\ ,$$

em que o tempo $t \in [0, 12]$ é medido em meses. Os gráficos dessas funções estão ilustrados na figura abaixo. Observe que, entre os instantes t_1 e t_2 indicados na figura, o crescimento do número de gaviões provoca uma queda no número de ratos que, por usa vez, provoca a diminuição do número de gaviões a partir de t_2. Essas alterações cíclicas de população são comuns aos sistemas presa-predador.

a) Determine o instante t_1 em que o número de ratos é máximo.

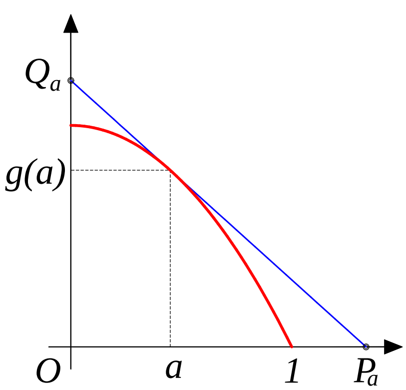
b) Determine o intervalo (t_0, t_2) no qual a função $G(t)$ é crescente.

c) Determine os instantes em que a taxa de variação de $R(t)$ passa de crescente para decrescente.



d) Lembrando que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$, determine o instante $t \in [0, 5]$ no qual a soma das populações de gaviões e de ratos atingiu o seu valor máximo.

4) A figura abaixo ilustra o gráfico da função $g(x) = 1 - x^2$ com $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ilustra ainda a reta tangente L_a ao gráfico de $g(x)$ em um ponto $(a, g(a))$ e os pontos P_a e Q_a de interseção desta reta com os eixos Ox e Oy, respectivamente.



a) Calcule a equação da reta L_a e, em seguida, obtenha as coordenadas dos pontos P_a e Q_a ilustrados na figura.

b) Usando o item anterior, defina como $A(a)$ a função que, a cada $a \in (0, 1)$, fornece a área do triângulo $P_a\,O\,Q_a$.

c) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento da função $A(a)$.

d) Calcule os limites $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} A(a)$ e $\displaystyle\lim_{a \to 1^-} A(a)$ e esboce o gráfico de $A(a)$.