Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

Prova 2 - 2.^{o}/2003 - 29/10/2003

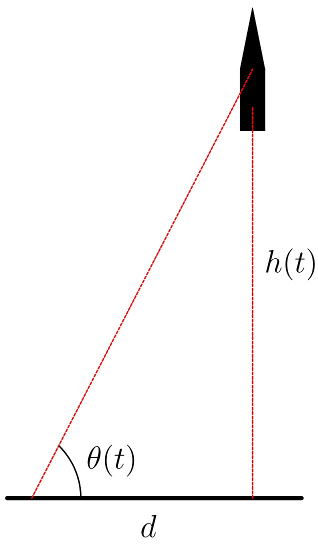
Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1, a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta a caneta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a $0,5$ ou a $-0,5$, conforme a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco, com marcação rasurada ou com dupla marcação terão valor igual a zero.

1) Suponha $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas no intervalo $(0,\infty)$ e tal que: $f'(x) > 0$ se $0 < x < 1$; $f'(x) < 0$ se $x > 1$; $f''(x) > 0$ se $x > \sqrt{3}$ e $f''(x) < 0$ se $0 < x < \sqrt{3}$. Suponha ainda que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

C	E	a) A função possui um único ponto crítico no intervalo $(0,\infty)$.
C	E	b) O ponto $x = 1$ é de máximo local.
C	E	c) $f(x) \geqslant f(0)$ $\forall x \geqslant 0$.
C	E	d) O gráfico da função não cruza o eixo $\mathcal{O}x$ no intervalo $(1,\infty)$.
C	E	e) O gráfico da função não muda de concavidade.

2) Para filmar o lançamento de um foguete, uma câmera é colocada a uma distância $d = 300$ m da plataforma de lançamento, conforme ilustra a figura abaixo. Indique por $h(t)$ a altura (em metros) do foguete e por $\theta(t)$ o ângulo (em radianos) que a câmera faz com a horizontal t segundos após o lançamento. No que segue, use as aproximações $\text{tg}(\pi/6) = 0,58$ e $\text{tg}(\pi/3) = 1,73$.



a) Obtenha uma expressão de $\theta(t)$ em termos de d, de $h(t)$ e das funções trigonométricas inversas.

Resposta:

b) Calcule o valor de $\theta(t)$ no instante t em que $h(t) = 174$ m.

Resposta:

c) Obtenha uma expressão para a a velocidade angular $\theta'(t)$ do movimento da câmera em termos de d, de $h(t)$ e da velocidade $h'(t)$ do foguete.

Resposta:

d) Determine o valor do quociente $\theta'(t)/h'(t)$ no instante t em que $h(t) = 174$ m.

Resposta:

3) Denote por $v(t)$ a velocidade de um corpo de massa $m = 0,1$ kg que foi lançado verticalmente com velocidade inicial $v(0) = 63$ m/s e sujeito a uma força de resistência do ar $FR = -v(t)$. Nesse caso, usando a aproximação $g = 10$ m/s^2 da aceleração da gravidade, pode-se mostrar que $v(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$(*)\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{1+v(t)} & = & -10 \\ v(0) & = & 63 \end{cases}$$

Como ilustra os itens a seguir, o problema $(*)$ pode ser melhor entendido a partir do fato de que, se a derivada de uma função for identicamente nula em um intervalo, então a função é necessariamente constante.

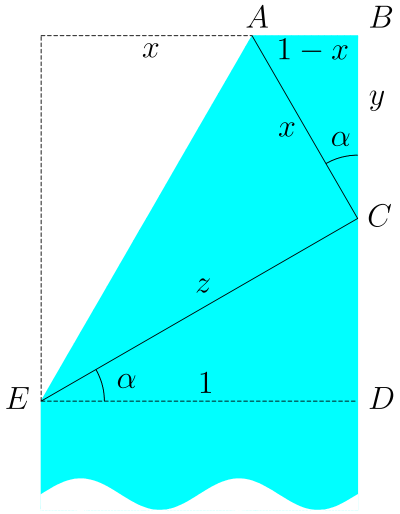
a) Calcule as derivadas das funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

b) Use o item anterior e as informações dadas para obter uma relação entre as funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

c) Use o item anterior e a condição inicial $v(0) = 63$ para obter a expressão de $v(t)$.

d) Determine o instante em que o corpo alcança a altura máxima usando a aproximação $\ln(2) = 0,69$.

4) Em uma longa fita de papel de largura igual a 1 m, um dos cantos é dobrado conforme ilustra a figura abaixo. Com a notação da figura, o comprimento y pode ser calculado em termos da variável x usando o teorema de Pitágoras. Em seguida, o comprimento z pode também ser calculado em termos da variável x usando o fato de que os triângulos ABC e CDE são semelhantes. Após esses cálculos, é claro então que a área $a(x)$ do triângulo ACE pode ser expressa em termos da variável x.



a) Proceda como indicado para calcular os comprimentos y e z em termos da variável x.

b) Determine o domínio e a expressão da função $a(x)$.

c) Calcule os pontos críticos de $a(x)$.

d) Esboce o gráfico de $a(x)$ indicando os intervalos de crescimento e decrescimento, os valores da função nos pontos críticos e o seu comportamento nos pontos extremos do domínio.