Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Cálculo I

## Prova 2 - 2.º/2003 - 29/10/2003

## – Gabarito –

1) Suponha $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua com derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas no intervalo $(0,\infty)$ e tal que: $f'(x) > 0$ se $0 < x < 1$; $f'(x) < 0$ se $x > 1$; $f''(x) > 0$ se $x > \sqrt{3}$ e $f''(x) < 0$ se $0 < x < \sqrt{3}$. Suponha ainda que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

**Observação:** os items dessa questão diferiam de prova para prova, e segue uma solução que responde a todos eles.

a) Sobre a existência de pontos críticos da função no intervalo $(0,\infty)$.

**Solução:** como a derivada $f'(x)$ é contínua, positiva em $(0,1)$ e negativa em $(1,\infty)$, segue-se que $f'(1) = 0$, sendo este o único ponto onde a derivada se anula. Assim, $f(x)$ *possui apenas um* ponto crítico no intervalo $(0,\infty)$.

b) Sobre a classificação do ponto $x = 1$.

**Solução:** como $f'(x)$ é positiva em $(0,1)$ e negativa em $(1,\infty)$, pelo teste da primeira derivada segue-se que $x = 1$ é um ponto de *máximo* local.

c) Sobre a ordem entre os valores de $f(x)$ e $f(0)$.

**Solução:** como $f'(x)$ é positiva em $(0,1)$, segue-se que $f(x)$ é crescente nesse intervalo. Em particular, $f(x) \geqslant f(0)$ para $x \in [0,1]$. No entanto, como $f(x)$ é decrescente no intervalo $[1,\infty)$, podem ter valores de $x$ nesse intervalo para os quais $f(x) < f(0)$. Assim, *é certo* que $f(x) \geqslant f(0) \ \ \forall x \leqslant 1$, mas *não é certo* que $f(x) \geqslant f(0) \ \ \forall x \geqslant 0$.

d) Sobre se o gráfico da função cruza o eixo $\mathcal{O}x$ em algum ponto do intervalo $(1,\infty)$.

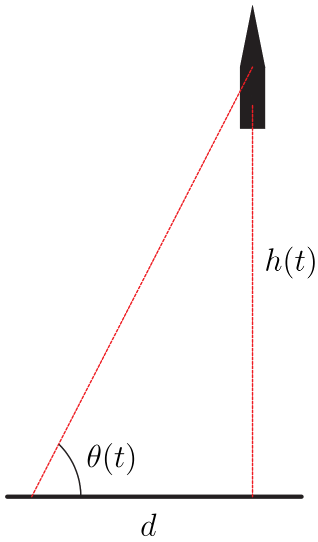
**Solução:** como $f'(x)$ é negativa no intervalo $(1,\infty)$, se existisse um ponto $x_0 \in (1,\infty)$ tal que $f(x_0) = 0$, então $f(x) < f(x_0) = 0$ para todo $x > x_0$, o que contraria a hipótese de que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Assim, o gráfico *não cruza* o eixo $\mathcal{O}x$ no intervalo $(1,\infty)$.

e) Sobre a concavidade do gráfico da função $f(x)$.

**Solução:** como $f''(x) > 0$ se $x > \sqrt{3}$ e $f''(x) < 0$ se $0 < x < \sqrt{3}$, segue-se que o gráfico é côncavo para cima no intervalo $(\sqrt{3},\infty)$ e côncavo para baixo no intervalo $(0,\sqrt{3})$. Logo, o gráfico *muda* de concavidade.

2) Para filmar o lançamento de um foguete, uma câmera é colocada a uma distância $d$ m da plataforma de lançamento, conforme ilustra a figura abaixo. Indique por $h(t)$ a altura (em metros) do foguete e por $\theta(t)$ o ângulo (em radianos) que a câmera faz com a horizontal $t$ segundos após o lançamento. No que segue, use as aproximações $\text{tg}(\pi/6) = 0,58$ e $\text{tg}(\pi/3) = 1,73$.

**Observação:** nessa questão, os valores de $d$ e de $h_0$ (indicado abaixo) diferiam de prova para prova, e segue uma solução que responde a todos os casos.




a) Obtenha uma expressão de $\theta(t)$ em termos de $d$, de $h(t)$ e das funções trigonométricas inversas.

**Resposta:** $$\theta(t) = \text{arc tg}\left(\frac{h(t)}{d}\right)$$

**Solução:** de acordo com a figura, tem-se que $\text{tg}(\theta(t)) = h(t)/d$, e basta agora aplicar a função arc tg em ambos os lados dessa igualdade.

b) Calcule o valor de $\theta(t)$ no instante $t$ em que $h(t) = h_0$ m.

**Resposta:** $$\theta(t) = \begin{cases} \pi/6 & \text{se} \quad d = 300 \text{ e } h_0 = 174 \\ \pi/3 & \text{se} \quad d = 200 \text{ e } h_0 = 346 \end{cases}$$

**Solução:** no instante $t$ em que $h(t) = h_0$, tem-se $\theta(t) = \text{arc tg}(h_0/d)$. No caso em que $d = 300$ e $h_0 = 174$, obtém-se $\theta(t) = \text{arc tg}(0,58) = \pi/6$. Analogamente, no caso em que $d = 200$ e $h_0 = 346$, obtém-se $\theta(t) = \text{arc tg}(1,73) = \pi/3$.

c) Obtenha uma expressão para a a velocidade angular $\theta'(t)$ do movimento da câmera em termos de $d$, de $h(t)$ e da velocidade $h'(t)$ do foguete.

**Resposta:** $$\theta'(t) = \frac{d^2}{d^2 + h(t)^2}\frac{h'(t)}{d}$$

**Solução:** usando a regra da cadeia e a derivada $\dfrac{d}{dx}\text{arc tg}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, obtém-se que

$$\theta'(t) = \frac{1}{1 + (h(t)/d)^2}\frac{h'(t)}{d} = \frac{d^2}{d^2 + h(t)^2}\frac{h'(t)}{d}$$

d) Determine o valor do quociente $\theta'(t)/h'(t)$ no instante $t$ em que $h(t) = h_0$ m.

**Resposta:** $$\frac{\theta'(t)}{h'(t)} = \begin{cases} \dfrac{3}{4 \times 300} & \text{se} \quad d = 300 \text{ e } h_0 = 174 \\ \dfrac{1}{4 \times 200} & \text{se} \quad d = 200 \text{ e } h_0 = 346 \end{cases}$$

**Solução:** observe que $d/\sqrt{d^2 + h(t)^2} = \cos(\theta(t))$. Logo, da expressão de $\theta'(t)$ obtida no item anterior, segue-se que $\theta'(t)/h'(t) = \cos^2(\theta(t))/d$. Como o ângulo $\theta(t)$ já foi calculado no item b), obtém-se que $\theta'(t)/h'(t) = \cos^2(\pi/6)/300$ se $d = 300$ e $h_0 = 174$, ou $\theta'(t)/h'(t) = \cos^2(\pi/3)/200$ se $d = 200$ e $h_0 = 346$.

---

3) Denote por $v(t)$ a velocidade de um corpo de massa $m = 0,1$ kg que foi lançado verticalmente com velocidade inicial $v(0) = 63$ m/s e sujeito a uma força de resistência do ar $FR = -v(t)$. Nesse caso, usando a aproximação $g = 10$ m/s$^2$ da aceleração da gravidade, pode-se mostrar que $v(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$(*)\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{1+v(t)} = -10 \\ v(0) = 63 \end{cases}$$

Como ilustra os itens a seguir, o problema $(*)$ pode ser melhor entendido a partir do fato de que, se a derivada de uma função for identicamente nula em um intervalo, então a função é necessariamente constante.

a) Calcule as derivadas das funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

**Solução:** usando a regra da cadeia e a derivada $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$, segue-se que

$$\frac{d}{dt}(-10\,t) = -10 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\ln(1+v(t)) = \frac{1}{1+v(t)}\, v'(t)$$

b) Use o item anterior e as informações dadas para obter uma relação entre as funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

**Solução:** do item anterior e do problema $(*)$, segue-se que a derivada da diferença $\ln(1 + v(t)) - (-10\,t)$ é identicamente nula no intervalo $(0, \infty)$, e portanto a função $\ln(1 + v(t)) - (-10\,t)$ é constante. Assim, as funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$ estão relacionadas pela igualdade $\ln(1 + v(t)) = -10\,t + K$, onde $K$ é uma constante.

c) Use o item anterior e a condição inicial $v(0) = 63$ para obter a expressão de $v(t)$.

**Solução:** isolando $v(t)$ da igualdade $\ln(1+v(t)) = -10\,t+K$ por meio da exponencial, segue-se que

$$v(t) = -1 + e^{-10\,t+K} = -1 + e^{-10\,t}\, e^K.$$

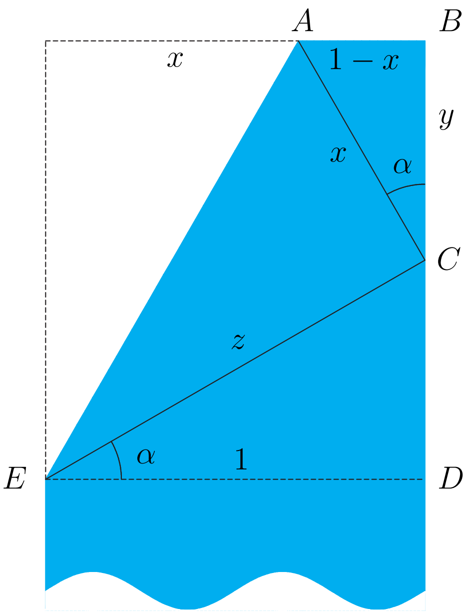
Da condição inicial $v(0) = 63$, obtém-se que $e^K = 64$, e portanto a expressão da velocidade é $v(t) = -1 + 64\, e^{-10\,t}$.

d) Determine o instante em que o corpo alcança a altura máxima usando a aproximação $\ln(2) = 0,69$.

**Solução:** a altura máxima é alcançada no instante em que $v(t) = 0$. Da expressão de $v(t)$, o instante é aquele para o qual $e^{-10\,t} = 1/64$. Aplicando o logarítmo em ambos os lados desta igualdade, o valor de $t$ é dado por

$$t = \frac{-\ln(1/64)}{10} = \frac{6\ln(2)}{10} \approx 0,414$$

4) Em uma longa fita de papel de largura igual a 1 m, um dos cantos é dobrado conforme ilustra a figura abaixo. Com a notação da figura, o comprimento $y$ pode ser calculado em termos da variável $x$ usando o teorema de Pitágoras. Em seguida, o comprimento $z$ pode também ser calculado em termos da variável $x$ usando o fato de que os triângulos $ABC$ e $CDE$ são semelhantes. Após esses cálculos, é claro então que a área $a(x)$ do triângulo $ACE$ pode ser expressa em termos da variável $x$.




a) Proceda como indicado para calcular os comprimentos $y$ e $z$ em termos da variável $x$.

**Solução:** por Pitágoras, obtém-se que $y = \sqrt{x^2-(1-x)^2} = \sqrt{2\,x-1}$. Em relação a $z$, da semelhança entre os triângulos $ABC$ e $CDE$, segue-se que $z/1 = x/y$. Logo, usando o valor de $y$, obtém-se que $z = x/\sqrt{2\,x-1}$.

b) Determine o domínio e a expressão da função $a(x)$.

**Solução:** a área do triângulo $ACE$ é igual a $z\,x/2$. Usando a expressão de $z$ em termos da variável $x$, a área $a(x)$ é dada por $a(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^2}{\sqrt{2\,x-1}}$, cujo domínio é o intervalo $(1/2, 1]$, uma vez que $\sqrt{2\,x-1}$ deve ser positivo.

c) Calcule os pontos críticos de $a(x)$.

**Solução:** usando as regras da cadeia e do quociente, obtém-se que

$$a'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\,x-1}\left(2\,x\sqrt{2\,x-1} - \frac{x^2}{\sqrt{2\,x-1}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x}{(2\,x-1)^{3/2}}\,(3\,x-2)\,.$$

Assim, o único ponto crítico no domínio de $a(x)$ é o ponto $x_0 = 2/3$.

d) Esboce o gráfico de $a(x)$ indicando os intervalos de crescimento e decrescimento, os valores da função nos pontos críticos e o seu comportamento nos pontos extremos do domímio.

**Solução:** analisando o sinal da derivada, segue-se que $a(x)$ é decrescente no intervalo $(1/2, x_0)$ e crescente no intervalo $(x_0, 1)$, onde $x_0 = 2/3$ é o único ponto crítico e $a(x_0) = 2\sqrt{3}/9$. Nos pontos extremos do domínio, tem-se que $a(1) = 1/2$ e

$$\lim_{x\to(1/2)^+} a(x) = \lim_{x\to(1/2)^+} \frac{x^2}{2\sqrt{2\,x-1}} = \infty.$$

A partir dessas informações, o gráfico de $a(x)$ é como ilustrado ao lado.