Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

3.^{a} Prova 1.^{o}/2000 03/07/00

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

1) Calcule a área, ilustrada na Figura 1, limitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2 - 2x^2$ e $g(x) = \left|\operatorname{sen}(\pi x)\right|$, com $x \in [-1, 1]$.

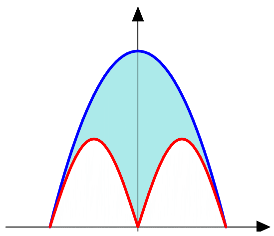


Figura 1

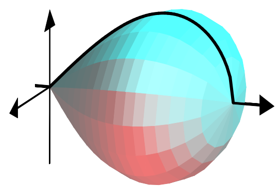
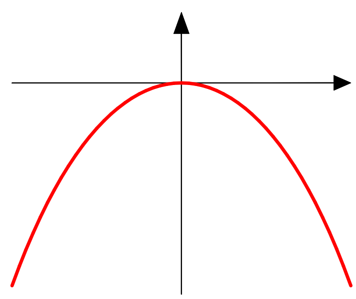


Figura 2

2) Para uma função não negativa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do seu gráfico em torno do eixo x é dado por $V = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx$. Calcule esse volume no caso em que $f(x) = \sqrt{x \operatorname{sen}(x)}$, definida no intervalo $[0, \pi]$, conforme Figura 2.

3) O comprimento do gráfico de uma função $f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$, é dado pela integral $C = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. Considere $f(x) = \ln(1 - x^2)$, definida no intervalo $[-1/2, 1/2]$.



a) Verifique que $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ é da forma $p(x)/q(x)$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios do segundo grau.

b) Verifique que $\dfrac{p(x)}{q(x)} = A + \dfrac{B}{1 - x^2}$, em que A e B são constantes.

c) Calcule o comprimento de arco da função $f(x)$, para $x \in [-1/2, 1/2]$.

4) Considere uma partícula de massa m em movimento retilíneo, sujeita a uma força F, proporcional à velocidade $v(t)$ da partícula e que atua em sentido **contrário** ao deslocamento, isto é, $F = -k\, v(t)$, $k > 0$. Suponha ainda que a velocidade inicial $v(0) = v_0$ seja positiva.

a) Lembrando que também temos $F = m\, v'(t)$ (Segunda Lei de Newton), em que $v'(t)$ é a aceleração da partícula, obtenha a equação que relaciona m, k, $v(t)$ e $v'(t)$.

b) Lembrando que a derivada de $\ln(v(t))$ é igual a $v'(t)/v(t)$, use o item anterior para obter $v(t)$ em termos de v_0, k e m.

c) Determine o espaço $s(t)$ percorrido pela partícula até o instante t, supondo que $s(0) = 0$.

d) Calcule a distância total d percorrida pela partícula, dada por $d = \lim\limits_{t\to\infty} s(t)$.