Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

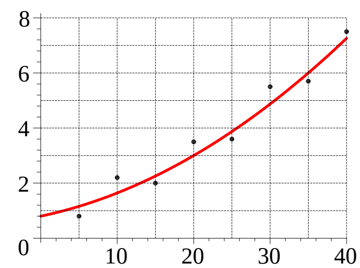
Cálculo I

3.^{a} Prova - 1.^{o}/2002 - 09/09/2002

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1 a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a 0.5 ou a -0.5, segundo a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco terão valor igual a zero.

1) Seja $s(t)$ a posição de uma partícula que se desloca ao longo de uma reta coordenada. Suponha que, durante 40 segundos, a velocidade dessa partícula - em m/s - tenha sido medida a cada 5 segundos, com os resultados registrados no gráfico a seguir. Após esse procedimento, a velocidade foi modelada pela função $v(t)$ cujo gráfico está também ilustrado abaixo.



C | E a) A partir dos pontos correspondentes às medições da velocidade, conclui-se que a aceleração da partícula foi constante entre os instantes $t = 5$ e $t = 15$.

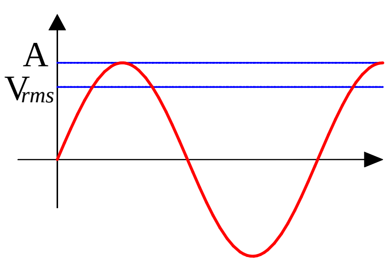
C | E b) A partir do gráfico de $v(t)$, conclui-se que a partícula teve aceleração constante durante os 40 segundos.

C | E c) A diferença $s(30) - s(20)$ foi superior a 30 metros.

C | E d) O valor médio de $v(t)$ entre os instantes $t = 10$ e $t = 20$ é superior a 2 m/s.

C | E e) Do gráfico de $v(t)$ segue-se que a função $s(t)$ é dada por $s(t) = \dfrac{3}{80}t^2 + t + 10$.

2) A voltagem $V(t)$ (em Volts) de uma corrente alternada pode ser modelada pela função $V(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f t)$, em que A é a amplitude da corrente, f é a frequência (em Hz), $1/f$ é o período e t é o tempo (em segundos). O que os voltímetros medem é o valor V_{rms}, obtido como a raiz quadrada do valor médio da função $V^2(t)$ no intervalo $[0, 1/f]$, isto é,



$$V_{rms} = \left(f \int_0^{1/f} V^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Determine uma primitiva para a função $V^2(t)$.

Resposta:

b) Calcule o valor V_{rms} em termos das constantes fornecidas.

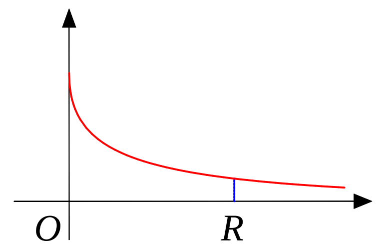
Resposta:

c) Determine a amplitude de corrente no caso de Brasília, em que $V_{rms} = 220$ Volts.

Resposta:

3) A figura ao lado ilustra o gráfico da função $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$. A área $A(R)$ sob esse gráfico entre $x = 0$ e $x = R$ é dada pela integral

$$A(R) = \int_0^R e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$



a) Use uma mudança de variáveis para transformar a integral indefinida $\int e^{-\sqrt{x}}\, dx$ em uma outra cujo integrando não envolva a função raiz quadrada.

b) Calcule a integral do item anterior usando integração por partes.

c) Usando os resultados anteriores, determine explicitamente a função $A(R)$.

d) Calcule o limite $\lim_{R\to\infty} A(R)$ usando a regra de H'Lôpital, e verifique se a área sob o gráfico da $f(x)$, para $x \in [0,\infty)$, é finita.

4) Segundo o modelo logístico, a partir de um valor inicial $k > 0$, a taxa de crescimento $p'(t)/p(t)$ de uma população $p(t)$ deve diminuir proporcionalmente ao aumento da população. Esta hipótese corresponde a supor que a função $p(t)$ satisfaz à equação $p'(t)/p(t) = k - cp(t)$, em que c é uma constante positiva. Equivalentemente, usando a notação $a = k/c$, essa equação pode ser escrita na forma

$$(*) \qquad \frac{p'(t)}{p(t)(a - p(t))} = c.$$

a) Para determinar $p(t)$, primeiro determine constantes A e B tais que

$$\frac{1}{x(a-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x}.$$

b) Usando o item anterior e lembrando que $\frac{d}{dt}\ln(u(t)) = u'(t)/u(t)$, obtenha uma primitiva para $p'(t)/[p(t)(a - p(t))]$ na forma de uma soma de duas funções, cada uma delas envolvendo o logaritmo .

c) Usando as propriedades do logaritmo, transforme a soma das duas funções do item anterior em uma função da forma $\ln(v(t))$, em que a expressão de $v(t)$ envolve $p(t)$.

d) Finalmente, usando a equação $(*)$ e supondo que $p(t)$ e $a - p(t)$ são positivas, obtenha uma expressão para $p(t)$.