



Cálculo I

Prova 3 - 1.º/2003 - 09/07/2003

Nome: _____

Mat.: /

Turma: _____

Atenção: na questão 1, a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta a caneta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a 0,5 ou a $-0,5$, conforme a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco, com marcação rasurada ou com dupla marcação terão valor igual a zero.

1) Suponha que os móveis M_1 e M_2 se desloquem em uma trajetória retilínea, tendo iniciado o movimento simultaneamente a partir de um mesmo ponto e com velocidades, em km/h, dadas por $v_1(t) = t\sqrt{t^2 + 3^2}$ e $v_2(t) = 5t$. A figura abaixo ilustra os gráficos das velocidades em função do tempo t , em que $0 \leq t \leq 6$ e $t = 0$ corresponde ao início do movimento.

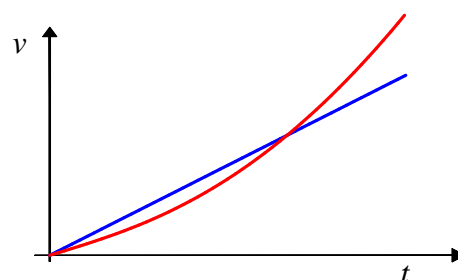
C E a) O instante $t > 0$ em que os móveis têm a mesma velocidade é maior do que 5.

C E b) Até o instante $t = 2$, o móvel M_2 percorreu mais de 12 km.

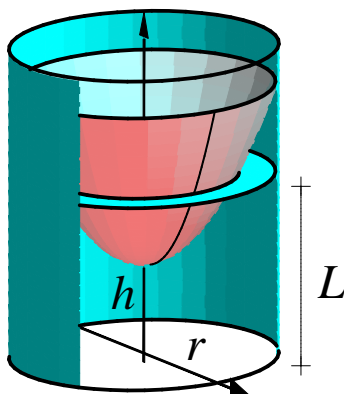
C E c) Até o instante $t = 3$, o móvel M_1 percorreu menos de $18^{3/2} - 3^3$ km.

C E d) No instante $t = 3$, o móvel M_1 está à frente do móvel M_2 .

C E e) O instante $t > 0$ em que os os móveis M_1 e M_2 estão à mesma distância da origem é maior que 4.



2) Considere um recipiente cilíndrico de raio $r = 5$ cm, inicialmente em repouso com água até a altura $L = 10$ cm. Em seguida, o recipiente começa a girar até que, juntamente com a água, alcance uma velocidade angular constante igual a ω rad/s. Nesse caso, a superfície da água corresponde à rotação, em torno do eixo Oy , do gráfico de uma função $f(x)$, com $x \in [0, r]$. Não havendo perda de água, pode-se mostrar que $f(x) = h + \omega^2 x^2/2g$, onde $g = 980$ cm/s² é a aceleração da gravidade e h é uma constante que depende de ω .



a) O volume V do sólido de rotação do gráfico de $f(x)$ em torno do eixo Oy é igual a $V = \int_0^r 2\pi x f(x) dx$. Use essa informação para calcular o volume de água no recipiente em termos de ω e h .

Resposta:

b) Usando o item anterior, obtenha h como função de ω .

Resposta:

c) Determine o valor de ω para que h seja igual à metade da altura da água em repouso.

Resposta:

3) Suponha que, juntamente com o combustível, um foguete tenha massa inicial de m_0 kg, e que o combustível seja consumido a uma taxa de r kg/s. Assim, a massa do foguete no instante $t \geq 0$ é dada por $m(t) = m_0 - r t$. Suponha ainda que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante de v_0 m/s em relação ao foguete. Nesse caso, indicando por g a aceleração da gravidade e considerando valores pequenos de t , a velocidade do foguete em relação à Terra pode ser modelada por

$$v(t) = -gt - v_0 \ln \left(\frac{m(t)}{m_0} \right).$$

- Determine uma primitiva para a função $\ln(x)$ usando integração por partes.
- Use o item anterior e substituição de variáveis para determinar uma primitiva para a função $\ln(m(t)/m_0)$.
- Determine a altura $s(t)$ do foguete em um instante $t > 0$, supondo $s(0) = 0$.
- Seja t_0 o instante em que $m(t_0)$ é igual a 90% da massa inicial m_0 . Calcule a altura do foguete no instante t_0 em termos das constantes m_0, r, v_0, g e $\ln(9/10)$.



4) Suponha que uma população inicial de 200 mil fêmeas de um determinado inseto habite uma região agrícola, e que esteja crescendo a uma taxa 50% ao ano. Para retardar o crescimento sem o uso de pesticidas, foram introduzidos 50 mil machos estéreis na região, que cruzam com as fêmeas mas não produzem descendentes. Indique por p a população, em milhares, de fêmeas desse inseto em um determinado instante. Nesse caso, o tempo $T(p)$, em anos, necessário para que essa população alcance o número $p < 200$ pode ser modelado pela função

$$T(p) = -2 \int_{200}^p \frac{x + 50}{x(x + 100)} dx .$$

- Determine constantes A e B tais que $\frac{x + 50}{x(x + 100)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 100}$.
- Usando o item anterior, obtenha uma expressão explícita para $T(p)$ em termos da função logarítmica.
- Usando a aproximação $\ln(3) = 1,1$, determine o tempo necessário para que a população de fêmeas seja reduzida à metade da população inicial.