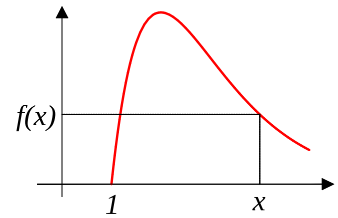
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

3.^{a} Prova - 2.^{o}/2000 - 11/12/2000

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

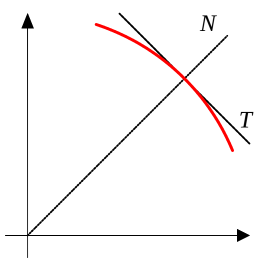
1) Considere a função $f(x) = (x-1)e^{-x}$, para $x \geqslant 1$, cujo gráfico está ilustrado abaixo.



a) Para $t > 1$, calcule a integral de $f(x)$ no intervalo $[1, t]$ e defina como sendo $A(t)$ a função resultante.

b) Verifique que, apesar da região entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo $\mathcal{O}x$ ser ilimitada, a sua área é finita, ou seja, $\lim_{t\to\infty} A(t)$ é finito.

2) Suponha que uma função positiva $f(x)$ tenha a propriedade de que a reta normal ao seu gráfico pelo ponto $(x, f(x))$ passe pela origem, e indique por $m(x)$ a inclinação dessa reta.



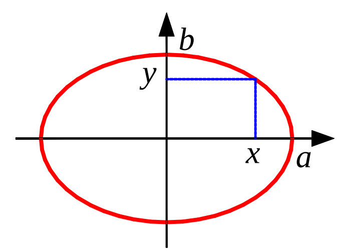
a) Determine $m(x)$ em termos da inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ pelo ponto $(x, f(x))$.

b) Usando o fato da reta normal passar pela origem, determine $m(x)$ em termos de x e de $f(x)$.

c) Igualando os resultados dos itens anteriores, verifique que $f(x)f'(x) = -x$.

d) Integrando a equação do item (c) e supondo que $f(3) = 4$, verifique que o gráfico de $f(x)$ está contido em um circunferência de centro na origem e raio igual a 5.

3) Para $a, b > 0$, considere a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



a) Determine a função $y = f(x)$ cujo gráfico é a parte superior da elipse.

b) Determine a área da elipse usando substituição trigonométrica e a identidade $cos^2(\theta) = \dfrac{1 + cos(2\theta)}{2}$.

4) Após o salto, um pára-quedista abre o seu pára-quedas com uma velocidade inicial de 10 m/s, sendo que ele e seu pára-quedas pesam 50 kg. Nessas condições, e supondo que a força da resistência do ar seja dada por $20v(t)^2$, em que $v(t)$ é a velocidade do pára-quedista no instante t, mostra-se que $v(t) > 5$ e que

$$\frac{v'(t)}{v(t)^2 - 25} = -0,4, \;\; \forall t > 0 \; .$$

a) Com o objetivo de determinar $v(t)$, obtenha inicialmente constantes A e B tais que

$$\frac{1}{x^2 - 25} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} \;\; \forall x \neq \pm 5 \; .$$

b) Usando o item (a) e lembrando a igualdade $\dfrac{d}{dt}\ln(f(t)) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$, calcule uma primitiva para a função $\dfrac{v'(t)}{v(t)^2 - 25}$.

c) Usando os dados do problema e os itens anteriores, determine a função $v(t)$.