Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

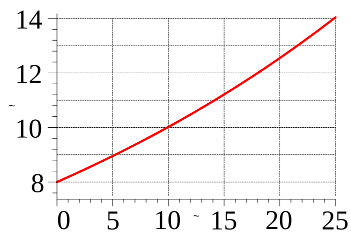
Cálculo I

3.^{a} Prova - 2.^{o}/2001 - 26/04/2002

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1 a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a 0.5 ou a -0.5, segundo a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco terão valor igual a zero.

1) Suponha que a população $p(t)$ (em milhões) de uma certa região seja dada pela função $p(t) = p_0\, e^{kt}$, em que $k = 0,025$, $t = 0$ corresponde ao ano de 1970 e o modelo é adequado por um período de 50 anos. Nesse caso, a taxa de variação $p'(t)$ da população satisfaz à equação $p'(t) = k\,p(t)$. Usando essas informações e o gráfico de $p(t)$, $t \in [0, 25]$, ilustrado abaixo, julgue os itens a seguir.



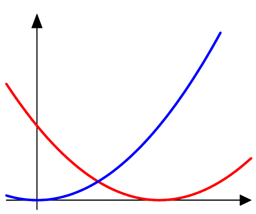
C | E a) O modelo prevê que a população se estabiliza em 14 milhões a partir de 1995.

C | E b) A população em 1974 era maior que 9 milhões.

C | E c) A população alcançou os 10 milhões antes de 1983.

C | E d) Em 1975, a taxa de variação da população foi superior a 200.000 habitantes por ano.

C | E e) A taxa de variação da população foi inferior a 270.000 habitantes por ano no período de 1985 a 1995.



2) Considere as funções $f,\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = x^2 - 4x + 4$ e $f(x) = x^2$, cujos gráficos estão ilustrados ao lado.

a) Determine o ponto x_0 tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Determine os valores de x para os quais $f(x) \leqslant g(x)$.

c) Calcule a área da região limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas $x = 0$ e $x = 3$.

3) Suponha que uma pressão sonora provoque a vibração da membrana do tímpano de uma pessoa e que a velocidade $v(t)$ de um ponto da membrana seja dada por $v(t) = 2e^{-t}\operatorname{sen}(t)$.

a) Determine a integral indefinida da função $v(t)$.

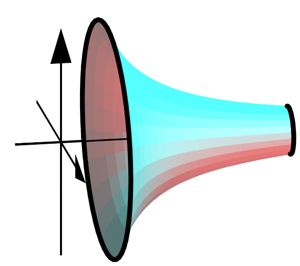
b) Determine a posição $s(t)$ do ponto da membrana supondo que $s(0) = 0$.

c) Determine o comportamento de $s(t)$ após um longo período de tempo, isto é, $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)$.

4) Para $x \in [1, b]$, o volume $V(b)$ e a área da superfície lateral $A(b)$ do sólido obtido por rotação do gráfico da função $f(x) = 1/x$ em torno do eixo $\mathcal{O}x$ são dados por

$$V(b) = \int_1^b \pi f(x)^2\, dx \quad \text{e} \quad A(b) = \int_1^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Passando o limite com $b \to \infty$, o sólido obtido é conhecido como a *trombeta de Gabriel*, nome que pode ser melhor entendido a partir dos itens a seguir.



a) Calcule $V(b)$ e $\lim\limits_{b\to\infty} V(b)$.

b) Justifique a afirmativa de que $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \geqslant 2\pi f(x)$.

c) Do item anterior, segue que $A(b) \geqslant \int_1^b 2\pi f(x)\, dx$. Conclua daí que $A(b) \geqslant 2\pi \ln(b)$.

d) Usando propriedades do limite, determine o $\lim\limits_{b\to\infty} A(b)$ e compare o resultado com aquele obtido no item a).