Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

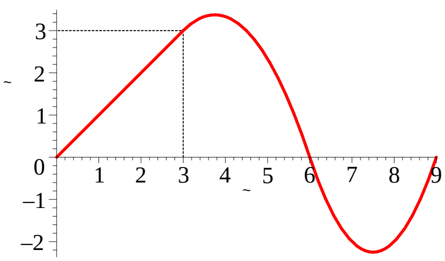
Cálculo I

Prova 3 - 2.º/2002 - 10/02/2003

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1 a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a 0.5 ou a -0.5, segundo a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco terão valor igual a zero.

1) Considere uma reta orientada da esquerda para a direita, com origem no ponto $\mathcal{O}$. Suponha que, no instante t, a posição em relação à origem de uma partícula que se desloca ao longo dessa reta seja dada por $s(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)\,dr$, em que $f\colon [0,9] \to \mathbb{R}$ é a função cujo gráfico está ilustrado abaixo. Considere ainda que t seja dado em segundos, que $s(t)$ seja dada em metros e que, para $0 \leqslant x \leqslant 3$, o gráfico de $f(r)$ seja um segmento de reta.



C | E a) A partícula está se afastando da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$.

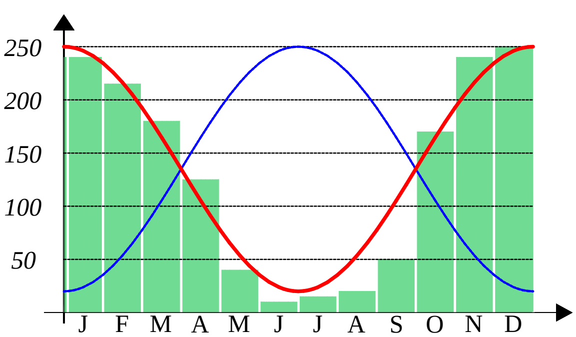
C | E b) A partícula percorre menos de 4 metros nos primeiros 3 segundos.

C | E c) No instante $t = 6$ a partícula está na origem $\mathcal{O}$.

C | E d) No instante $t = 9$ a partícula está à direita de $\mathcal{O}$.

C | E e) O espaço total percorrido pela partícula é igual a $\displaystyle\int_0^6 f(r)\,dr - \int_6^9 f(r)\,dr$.

2) De acordo com o diagrama abaixo, os índices pluviométrico e de evaporação em Brasília, durante os meses de janeiro a dezembro, podem ser modelados, respectivamente, pelas funções $P(t) = 115\cos(\pi\, t/6) + 135$ e $E(t) = -115\cos(\pi\, t/6) + 135$, em que t é dado em meses. Assim, desconsiderando-se outros fatores, a taxa de variação do volume $V(t)$ de um lago de área igual a 40 km^2 pode ser modelada pela função $V'(t) = 40 \times 10^{-6}(P(t) - E(t))$.



Fonte: *www.geocities.com/TheTropics/3416/bsb_2p.htm*

a) Determine os meses em que $V(t)$ aumenta.

Resposta:

b) Durante os 12 meses considerados, determine o volume total de água que entra no lago devido apenas à precipitação pluviométrica.

Resposta:

c) Considerando $V(0) = 0,5$ km^3, determine $V(t)$ em um instante genérico $t \in [0, 12]$.

Resposta:

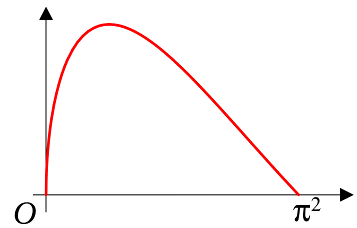
d) Determine os instantes $t \in [0, 12]$ nos quais $V(t) = V(0)$.

Resposta:

3) Considere o problema de calcular a área A sob o gráfico da função $f\colon [0,\pi^2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$, ilustrado na figura ao lado.

a) Para o cálculo da área, primeiro use integração por partes para calcular $\int y \operatorname{sen}(y)\, dy$.

b) Use a mudança de variável $y = \sqrt{x}$ para transformar a integral indefinida $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx$ em uma outra cujo integrando não envolva a função raiz quadrada.



c) Use os itens anteriores para obter uma primitiva para a função $f(x)$.

d) Calcule a área A usando o item anterior.

4) No estudo dos fogos de artifício, suponha que $v(t)$ seja a velocidade de uma bomba lançada verticalmente com velocidade inicial $v(0) = 50$ m/s. Suponha ainda que a bomba tenha massa $m = 0,1$ kg, que a aceleração da gravidade seja $g = 10$ m/s^2 e que a força de resistência do ar F seja modelada por $F = -0,01\, v(t)$. Nessas condições, $v(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{100 + v(t)} = -0,1 \quad \text{para } t > 0, \\[2ex] v(0) = 50\,. \end{cases}$$

a) Supondo $100 + v(t) > 0$, obtenha uma primitiva para a função $\dfrac{v'(t)}{100 + v(t)}$.

b) Use o item anterior e a condição inicial $v(0) = 50$ para obter a função $v(t)$.

c) Determine o instante t_0 em que a bomba alcança a altura máxima usando as aproximações $\ln(2) = 0,7$ e $\ln(3) = 1,1$.