Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

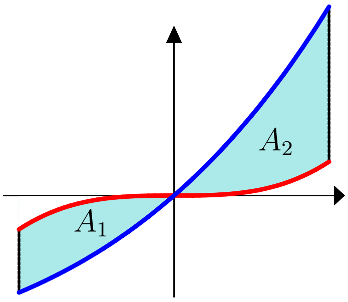
Cálculo I

Prova 3 - 2.º/2003 - 03/12/2003

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1, a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta a caneta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a $0,5$ ou a $-0,5$, conforme a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco, com marcação rasurada ou com dupla marcação terão valor igual a zero.

1) Considere as funções $f(x) = 8\,x\,e^{x/3}$ e $g(x) = 2\,x^3$, e sejam A_1 e A_2 as áreas limitadas pelos gráficos dessas funções e pelas retas $x = \pm 1$, conforme ilustra a figura a seguir. No que segue, use a aproximação $e^{1/3} = 1,4$.



C | E a) Para todo $x \in [-1, 0]$ tem-se que $f(x) \geqslant g(x)$.

C | E b) Tem-se que $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

C | E c) $A_1 = \int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\,dx$.

C | E d) A integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ é maior que 6.

C | E e) A soma $A_1 + A_2$ é menor que 8.

2) Recentemente, um grande esforço tem sido feito para despoluir o Lago Paranoá, que tem aproximadamente volume $V = 500 \times 10^6$ m^3 e vazão $v = 10^6$ m^3/dia. Denotando por $q(t)$ a quantidade de detritos no instante t, suponha $q(0) = 0,20\,V$ kg e que se queira reduzir essa quantidade para um valor inferior a $0,10\,V$. Para isso, pretende-se que o lançamento de detritos seja limitado a uma concentração de $0,05$ kg/m^3. Seriam então lançados $0,05\,v$ kg de detritos por dia no lago, e retirados $(q(t)/V)\,v$ kg por dia. Nesse caso, a taxa de variação $q'(t)$ é igual à quantidade que entra menos a quantidade que sai de detritos por dia.

a) Obtenha uma equação diferencial satisfeita pela função $q(t)$.

Resposta:

b) Obtenha a expressão de $q(t)$ usando o item anterior e a condição inicial $q(0) = 0,20\,V$.

Resposta:

c) Usando a aproximação $\ln(3) = 1,1$, determine o instante t_0 para o qual $q(t_0) = 0,1\,V$.

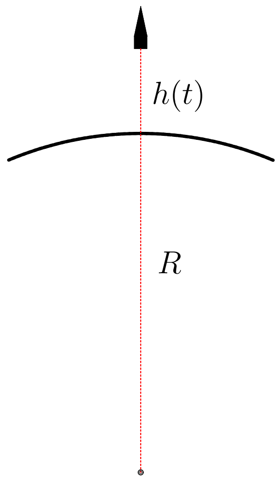
Resposta:

d) Calcule o limite $\lim_{t\to\infty} q(t)$.

Resposta:

3) Nem tudo o que sobe desce! De fato, pode-se imaginar que um corpo seja lançado com uma velocidade tão grande que acabe escapando da atração gravitacional da Terra. Para se ter uma idéia dessa velocidade, denote por v_0 a velocidade inicial, por m a massa e por $h(t)$ a altura do corpo a partir do solo no instante t. Desconsiderando a resistência do ar, o corpo está sujeito apenas à força gravitacional $F = -m\,M\,G/(R + h(t))^2$, em que G é constante, M é a massa e R é o raio da Terra. Usando a segunda lei de Newton $F = m\,h''(t)$, em que $h''(t)$ é a aceleração do corpo, segue-se que $h(t)$ satisfaz às condições

$$(*)\ \begin{cases} m\,h''(t) &= -\dfrac{m\,M\,G}{(R+h(t))^2} \\ h(0) &= 0 \\ h'(0) &= v_0 \end{cases}$$



a) Cancelando a massa m e multiplicando a equação em $(*)$ por $h'(t)$, obtém-se que $h'(t)\,h''(t) = -M\,G\,h'(t)/(R+h(t))^2$. Use substituição de variáveis para determinar a integral indefinida de cada uma das funções $h'(t)\,h''(t)$ e $-M\,G\,h'(t)/(R+h(t))^2$.

b) Usando o item anterior, verifique que $h'(t)^2$ pode ser expressa em termos da função $h(t)$, das constantes M e G e de uma constante arbitrária K.

c) Use as condições iniciais $h(0) = 0$ e $h'(0) = v_0$ para determinar a constante K.

d) Determine agora uma outra constante v_e tal que, se $v_0 \geqslant v_e$, então a velocidade $h'(t)$ é sempre positiva. A constante v_e é dita a velocidade de escape da Terra.

4) Suponha que 1 g de uma substância química A combine com 3 g de outra substância B para formar o composto C, e que hajam inicialmente 50 g de A e 33 g de B. Denotando por $Q(t)$ a quantidade de C no instante t, tem-se que $Q(t)/4$ correspondem à massa da substância A e $3\,Q(t)/4$ correspondem à de B. Assim, as quantidades remanescentes de A e B após t segundos são, respectivamente, $50 - Q(t)/4$ e $33 - 3\,Q(t)/4$. Supondo ainda que a taxa $Q'(t)$ de formação do composto C seja proporcional ao produtos das quantidades remanescentes, segue-se que $Q(t)$ satisfaz à equação

$$(**) \quad Q'(t) = k\,(50 - Q(t)/4)\,(33 - 3\,Q(t)/4) = K\,(200 - Q(t))\,(44 - Q(t))$$

em que k e K são constantes .

a) Para obter a função $Q(t)$, primeiro calcule a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(200-x)(44-x)}$.

b) Use a equação $(**)$, o item anterior e subtituição de variáveis para obter uma expressão de $Q(t)$ em termos da constante K e de uma constante arbitrária L.

c) Determine a constante L usando a condição inicial $Q(0) = 0$.

d) Determine a maior quantidade do composto C que pode ser produzida a partir da reação dada.