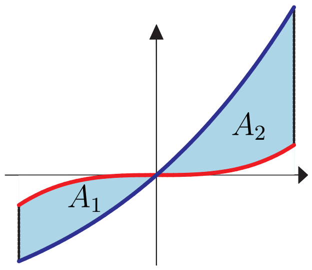
Cálculo I

Prova 3 - 2.^{o}/2003 - 03/12/2003

– Gabarito –

1) Considere as funções $f(x) = 8\,x\,e^{x/3}$ e $g(x) = 2\,x^3$, e sejam A_1 e A_2 as áreas limitadas pelos gráficos dessas funções e pelas retas $x = \pm 1$, conforme ilustra a figura a seguir. No que segue, use a aproximação $e^{1/3} = 1,4$.

Observação: os items dessa questão diferiam de prova para prova, e segue uma solução que responde a todos eles.



a) Sobre a relação de ordem entre as funções f e g.

Solução: do gráfico percebe-se que $f(x) \leqslant g(x)$ para $x \in [-1, 0]$, e que $f(x) \geqslant g(x)$ para $x \in [0, 1]$.

b) Sobre as simetrias das funções f e g em relação à origem.

Solução: a função g é ímpar, isto é, $g(-x) = g(x)$. Logo, usando mudança de variáveis, obtém-se que $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = -\int_0^1 g(x)\,dx$. Já a função f não tem essa propriedade, e um cálculo simples mostra que $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \neq -\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Sobre a expressão da área A_1.

Solução: no intervalo $[-1, 0]$, tem-se que $f(x) \leqslant g(x)$, e portanto a área A_1 é dada por $A_1 = \int_{-1}^{0}(g(x) - f(x))\,dx$.

d) Sobre o cálculo da integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solução: usando integração por partes, obtém-se

$$\int 8\,x\,e^{x/3}\,dx = 8\left(x\,3\,e^{x/3} - \int 3\,e^{x/3}\right) = 8\,\left(3\,x\,e^{x/3} - 9\,e^{x/3}\right) = 24\,e^{x/3}(x-3) + C.$$

Segue-se que $F(x) = 24\,e^{1/3}(x - 3)$ é uma primitiva para $f(x)$. Usando esse fato e o valor $e^{1/3} = 1,4$, obtém-se que $\int_0^1 f(x)\,dx \approx 4,8$. Assim, a integral e *menor que* 6.

e) Sobre o cálculo da soma $A_1 + A_2$.

Solução: usando as primitivas de f e g, obtém-se que

$$A_1 = \int_{-1}^{0}(g(x) - f(x))\,dx = (G(x) - F(x))\Big|_{-1}^{0} = 24(3 - 4\,e^{-1/3}) - 1/2$$

e

$$A_2 = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = (F(x) - G(x))\Big|_0^1 = 24(3 - 2\,e^{1/3}) - 1/2$$

Com o valor de $e^{1/3} = 1,4$ obtém-se que $A_1 + A_2 \approx 7,2$. Assim, a soma é *menor que* 8.

2) Recentemente, um grande esforço tem sido feito para despoluir o Lago Paranoá, que tem aproximadamente volume $V = 500 \times 10^6$ m^3 e vazão $v = 10^6$ m^3/dia. Denotando por $q(t)$ a quantidade de detritos no instante t, suponha $q(0) = c_0\, V$ kg e que se queira reduzir essa quantidade para um valor inferior a $0,10\, V$. Para isso, pretende-se que o lançamento de detritos seja limitado a uma concentração de c kg/m^3. Seriam então lançados $c\, v$ kg de detritos por dia no lago, e retirados $(q(t)/V)\, v$ kg por dia. Nesse caso, a taxa de variação $q'(t)$ é igual à quantidade que entra menos a quantidade que sai de detritos por dia.

Observação: os valores usados de c_0 foram $0,20$ ou $0,18$, e os de c foram $0,05$ ou $0,09$. Segue uma solução que responde a todos os casos.

a) Obtenha uma equação diferencial satisfeita pela função $q(t)$.

Resposta:
$$q'(t) = c\, v - (q(t)/V)\, v = (-v/V)(q(t) - c\, V)$$

Solução: basta escrever o que foi dito no enunciado, isto é, que $q'(t)$ é igual à diferença entre o que entra e o que sai de detritos diariamente.

b) Obtenha a expressão de $q(t)$ usando o item anterior e a condição inicial $q(0) = a_0\, V$.

Resposta:
$$q(t) = \left(c + (c_0 - c)e^{-v\,t/V}\right) V$$

Solução: uma das maneiras de obter a expressão de $q(t)$ é observar que, dividindo a equação do item anterior por $q(t) - c\, V$, obtém-se $q'(t)/(q(t) - c\, V) = -v/V$, e o lado esquerdo dessa igualdade é a derivada logarítmica da função $\ln(\left|q(t) - c\, V\right|)$. Assim, $q(t)$ satisfaz
$$\ln(\left|q(t) - c\, V\right|) = \frac{-v\, t}{V} + C.$$
Basta agora isolar a função $q(t)$, usar a condição inicial $q(0) = c_0\, V$ e o fato de que $q(t) > c_0\, V$. Em particular, se $c_0 = 0,20$ e $c = 0,05$, então $q(t) = (0,05{+}0,15\, e^{-v\,t/V})V$. Analogamente, se $c_0 = 0,18$ e $c = 0,09$, então $q(t) = (0,09 + 0,09\, e^{-v\,t/V})V$.

c) Usando a aproximação $\ln(3) = 1,1$, determine o instante t_0 para o qual $q(t_0) = 0,1\, V$.

Resposta:
$$t_0 = \begin{cases} 500 \times 1,1 \text{ dias}, & \text{se } c_0 = 0,20 \text{ e } c = 0,05 \\ 500 \times 2,2 \text{ dias}, & \text{se } c_0 = 0,18 \text{ e } c = 0,09 \end{cases}$$

Solução: isolando o valor de t_0 da igualdade $q(t_0) = 0,10\, V$, obtém-se
$$t_0 = \frac{v}{V} \ln\left(\frac{c_0 - c}{0,10 - c}\right).$$
Calculando, segue-se que o lado direito desta igualdade é igual a $500\ \ln(3)$ ou $500\ \ln(3^2)$, dependendo dos valores de c_0 e c conforme indicado na resposta acima.

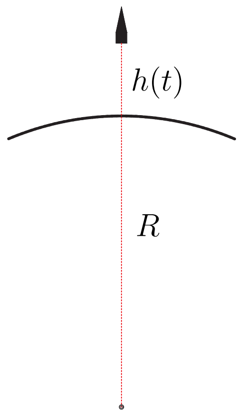
d) Calcule o limite $\lim\limits_{t\to\infty} q(t)$.

Resposta:
$$\lim_{t\to\infty} q(t) = c\, V$$

Solução: segue da expressão de $q(t)$ e do fato de que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-v\,t/V} = 0$.

3) Nem tudo o que sobe desce! De fato, pode-se imaginar que um corpo seja lançado com uma velocidade tão grande que acabe escapando da atração gravitacional da Terra. Para se ter uma idéia dessa velocidade, denote por v_0 a velocidade inicial, por m a massa e por $h(t)$ a altura do corpo a partir do solo no instante t. Desconsiderando a resistência do ar, o corpo está sujeito apenas à força gravitacional $F = -m\,M\,G/(R+h(t))^2$, em que G é constante, M é a massa e R é o raio da Terra. Usando a segunda lei de Newton $F = m\,h''(t)$, em que $h''(t)$ é a aceleração do corpo, segue-se que $h(t)$ satisfaz às condições

$$(*)\begin{cases} m\,h''(t) &= -\dfrac{m\,M\,G}{(R+h(t))^2} \\ h(0) &= 0 \\ h'(0) &= v_0 \end{cases}$$



a) Cancelando a massa m e multiplicando a equação em $(*)$ por $h'(t)$, obtém-se que $h'(t)\,h''(t) = -M\,G\,h'(t)/(R+h(t))^2$. Use substituição de variáveis para determinar a integral indefinida de cada uma das funções $h'(t)\,h''(t)$ e $-M\,G\,h'(t)/(R+h(t))^2$.

<u>**Solução:**</u> com as substituições $u = h'(t)$ e $v = R + h(t)$ obtém-se

$$\int h'(t)\,h''(t)\,dt = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}h'(t)^2 + K_1$$

e

$$\int \frac{-M\,G\,h'(t)}{(R+h(t))^2}\,dt = -M\,G\int \frac{dv}{v^2} = \frac{M\,G}{v} + K_2 = \frac{M\,G}{R+h(t)} + K_2$$

b) Usando o item anterior, verifique que $h'(t)^2$ pode ser expressa em termos da função $h(t)$, das constantes M e G e de uma constante arbitrária K.

<u>**Solução:**</u> basta usar a equação em $(*)$ e o item anterior para obter que

$$h'(t)^2 = \frac{2\,M\,G}{R+h(t)} + K$$

em que $K = 2(K_2 - K_1)$.

c) Use as condições iniciais $h(0) = 0$ e $h'(0) = v_0$ para determinar a constante K.

<u>**Solução:**</u> usando o item anterior e os valores $h(0) = 0$ e $h'(0) = v_0$, obtém-se que $v_0^2 = 2\,M\,G/R + K$. Assim, $K = v_0^2 - 2\,M\,G/R$.

d) Determine agora uma outra constante v_e tal que, se $v_0 \geqslant v_e$, então a velocidade $h'(t)$ é sempre positiva. A constante v_e é dita a velocidade de escape da Terra.

<u>**Solução:**</u> dos item anteriores segue-se que

$$h'(t)^2 = \frac{2\,M\,G}{R+h(t)} + v_0^2 - 2\,M\,G/R,$$

e basta escolher $v_e = \sqrt{2\,M\,G/R}$. De fato, se $v_0 \geqslant v_e$, então $v_0^2 - 2\,M\,G/R \geqslant 0$, e portanto $h'(t)$ é positiva.

4) Suponha que 1 g de uma substância química A combine com 3 g de outra substância B para formar o composto C, e que hajam inicialmente 50 g de A e 33 g de B. Denotando por $Q(t)$ a quantidade de C no instante t, tem-se que $Q(t)/4$ correspondem à massa da substância A e $3\,Q(t)/4$ correspondem à de B. Assim, as quantidades remanescentes de A e B após t segundos são, respectivamente, $50 - Q(t)/4$ e $33 - 3\,Q(t)/4$. Supondo ainda que a taxa $Q'(t)$ de formação do composto C seja proporcional ao produtos das quantidades remanescentes, segue-se que $Q(t)$ satisfaz à equação

$$(**) \quad Q'(t) = k\,(50 - Q(t)/4)\,(33 - 3\,Q(t)/4) = K\,(200 - Q(t))\,(44 - Q(t))$$

em que k e K são constantes .

a) Para obter a função $Q(t)$, primeiro calcule a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(200-x)(44-x)}$.

Solução: usando o método das frações parciais, obtém-se

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(200-x)(44-x)} &= \int \left(\frac{-1}{156}\frac{1}{(200-x)} + \frac{1}{156}\frac{1}{(44-x)} \right) dx \\ &= \frac{1}{156} \ln\left(\left|\frac{200-x}{44-x}\right| \right) + L_1\end{aligned}$$

b) Use a equação $(**)$, o item anterior e subtituição de variáveis para obter uma expressão de $Q(t)$ em termos da constante K e de uma constante arbitrária L.

Solução: a equação $(**)$ é equivalente a $Q'(t)/[(200-Q(t))(44-Q(t))] = K$. Usando a substituição de variáveis $x = Q(t)$ e o item anterior, segue-se que

$$\begin{aligned}\int K\,dt = \int \frac{Q'(t)\,dt}{(200-Q(t))(44-Q(t))} &= \int \frac{dx}{(200-x)(44-x)} \\ &= \frac{1}{156} \ln\left(\left|\frac{200-x}{44-x}\right| \right) + L_1 \\ &= \frac{1}{156} \ln\left(\left|\frac{200-Q(t)}{44-Q(t)}\right| \right) + L_1\end{aligned}$$

Assim, $Q(t)$ satisfaz $\ln\left(\left|\frac{200-Q(t)}{44-Q(t)}\right| \right) = 156\,K\,t + L_2$. Finalmente, indicando por $\widehat{K} = 156\,K$ e $L = e^{L_2}$, pode-se isolar $Q(t)$ para obter

$$Q(t) = \frac{44\,L\,e^{\widehat{K}\,t} - 200}{L\,e^{\widehat{K}\,t} - 1}.$$

c) Determine a constante L usando a condição inicial $Q(0) = 0$.

Solução: impondo que $Q(0) = 0$, da expressão acima obtém-se que $44\,L - 200 = 0$, de onde segue-se que $L = 200/44$.

d) Determine a maior quantidade do composto C que pode ser produzida a partir da reação dada.

Solução: essa quantidade corresponde ao limite de $Q(t)$ com $t \to \infty$. Usando H'Lôpital, obtém-se que $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = 44$.
