Provas de

Cálculo II

02/2008

Professor Rudolf R. Maier

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA Brasília, 15 de setembro de 2008.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA -IE

1ª prova em "CALCULO II"

2º período de 2008
TURMA **C**

NOME: MATRÍCULA:

Resolvam 05 (cinco) dos seguintes problemas

1) Determinar as *retas normais* da curva

$$y = \frac{2}{1+x^2} \qquad \text{que passam } \textit{pela origem}.$$

2) Considera-se *a área* A *entre a curva* $y = \sqrt{x}$ *e o eixo* Ox para $0 \le x \le 4$.

   a) Determinar *a medida de* A e as *coordenadas do centróide* (x_c, y_c).

   b) Determinar *o volume do sólido de rotação*, girando-se A

   b$_1$) em torno da reta $y = -1$ b$_2$) em torno da reta $y = x + 1$.

3) Consideremos a curva $y = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2 - 1} \; - \; \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right)$ para $1 \le x \le 4$.

   a) Determinar *o comprimento* s desta curva.

   b) Determinar *a superfície* S do sólido de rotação, girando-se a curva em torno do eixo Oy.

4) Seja $R > 0$. Qual é *o momento de inércia* $\Theta(R)$ do sólido obtido por rotação da curva

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

em torno do eixo Ox $(-R \le x \le R)$, supondo sua densidade homogênea $\rho = \frac{1}{\pi}$.
Determinar $\lim\limits_{R\to\infty} \Theta(R)$.

5) Para $a > 0$ considera-se a função $A(a)$ definida pela integral

$$A(a) = \int_0^{\pi/3} \frac{(\operatorname{tg} x)^{2a-1}}{\cos^2 x} dx \; .$$

Determinar os limites $\lim\limits_{a\to 0_+} A(a)$, $\lim\limits_{a\to\infty} A(a)$ tal como o valor $a = a_0$ que *minimiza a função* $A(a)$. Calcular $A(a_0)$.

6) Qual é *a aproximação quadrática* de $y = f(x) = \sqrt[5]{1+x}$?
Calcular $\sqrt[5]{33}$ por *aproximação quadrática*, observando-se $\sqrt[5]{33} = 2 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{32}}$.
Qual é a exatidão obtida?

7) Calcular $\operatorname{sen} \frac{1}{2}$ *pela aproximação de grau* 5 da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.
Quantas casas decimais são garantidas?

Obs.: Em 6) e 7) desejam-se resultados da forma

$$\ldots < \sqrt[5]{33} < \ldots \qquad \text{e} \qquad \ldots < \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} < \ldots \quad .$$

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA -IE

Brasília, 13 de outubro de 2008.

$2^{\underline{a}}$ prova em "CALCULO II"

$2^{\underline{o}}$ período de 2008

TURMA **C**

NOME: MATRÍCULA:

Resolvam 05 (cinco) dos seguintes problemas

1) Determinar o *polinômio de* McLaurin de grau $n = 2m$ da função
$$y = \operatorname{sen}^2 x \ .$$
Sugestão : Lembrar a fórmula trigonomêtrica $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ e o desenvolvimento de McLaurin de $y = \cos t$.

2) Determinar os pontos dos *extremos relativos* e os pontos de *curvatura máxima* da curva
$$y = x^3 - 3x \ .$$
De qual lado dos extremos relativos encontram-se os pontos de curvatura máxima? Qual é o valor da curvatura máxima ? Compare-o com o valor da curvatura nos extremos relativos.
(**Sugestão** : Esboçar a curva aproximadamente !)

3) Determinar, em forma paramétrica, *a evoluta da curva*
$$y = \ln x \ .$$
Estabelecer a equação da *circunferência osculatriz* para $x = 1$.

4) Determinar, em $I\!R^4$, o comprimento da curva
$$\mathbf{X}(t) = (10t^3,\ 36t^{5/2},\ 12t^{5/2},\ 75t^2) \quad \text{para } 1 \le t \le 5 \ .$$

5) Sejam os vetores em $I\!R^4$: $\mathbf{A} = (1, -1, 3, -4)$ e $\mathbf{B} = (1, 2, -1, 4)$ e consideremos a reta $\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{B}$ $(t \in I\!R)$.
   a) Qual é *a distância da origem* a esta reta.
   b) Determinar os *dois pontos da reta* que têm *distância* $d = 3$ *da origem.*

6) Determinar a *reta tangente, o hiperplano normal e a curvatura* $\kappa(t)$ da curva
$$\mathbf{X}(t) = (t^2 - 3t^4,\ t^3,\ t^3 + t,\ 2t - t^5)$$
em $I\!R^4$ no ponto $t = -1$.

7) Sejam $\mathbf{X}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$ e $\mathbf{Y}(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\big)$ duas curvas no espaço $I\!R^n$. Mostrar que, para o produto escalar
$$\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t) = x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t) + \ldots + x_n(t)y_n(t)$$
vale a *regra de derivação*
$$\big(\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t)\big)' = \mathbf{X}(t)\mathbf{Y}'(t) + \mathbf{X}'(t)\mathbf{Y}(t) \ .$$

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA -IE

Brasília, 11 de novembro de 2008.

$3^{\underline{a}}$ prova em "CALCULO II"

$2^{\underline{o}}$ período de 2008

TURMA **C**

NOME: MATRÍCULA:

Resolvam 05 (cinco) dos seguintes problemas

1) Sejam $a, b \in I\!R$. Transformar em *coordenadas Cartesianas e descrever* a seguinte curva, dada em coordenadas polares por

$$r = f(\theta) = a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (0 \le \theta \le \pi).$$

2) Qual é a *área do laço* cercado pela curva

$$r = f(\theta) = \sqrt{\mathrm{sen}^3\,\theta} \quad \text{quando} \quad 0 \le \theta \le \pi\ ?$$

3) Consideremos a espiral $r = f(\theta) = \theta^2 \quad (\theta \ge 0)$. Determinar *o comprimento* $s(\alpha)$ desta curva para $0 \le \theta \le \alpha$ *como função de* α.

Calcular $s(\sqrt{21})$. Determinar α de tal maneira que $s(\alpha) = \frac{335}{3}$.

4) Seja $k \ne 0$. Determinar *as declividades* $m(\theta)$ *das tangentes* à elipse

$$r = f(\theta) = \frac{k}{2 - \cos\theta} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

em função de θ. Verificar que $m(\theta)$ independe de k.

Quais são os *pontos das tangentes horizontais*?

Quais são as tangentes (em forma Cartesiana) para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$?

5) Determinar o *valor do limite*

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{100}\cdot 10^n \ + \ 11^n}\,.$$

Sugestão: Tem-se $\sqrt[n]{n^{100}\cdot 10^n \ + \ 11^n} = 11 \cdot \sqrt[n]{\dfrac{n^{100}}{\left(\frac{11}{10}\right)^n} \ + \ 1}$. E daí ?

6) Seja $K = 10^9$. Dar um *exemplo de um número* $N \in I\!N$ - e *justificar a escolha* do **seu** N - que garanta

$$\frac{\sqrt{n-10}}{\sqrt[3]{n}} > K \qquad \forall\, n \ge N\,.$$

Observação: Para todo $n \ge 21$ tem-se $\sqrt{n-10} > \sqrt{\frac{n}{2}}$.

7) Determinar os *dois limites*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\,\sqrt[100]{n^{245}} - 4n^{\sqrt{6}} + 8\sqrt{n}}{7\,\sqrt[100]{n^{245}} + 6n^{\sqrt{6}} - 2n} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3\,\sqrt[25]{n^{61}} - 4n^{\sqrt{6}} + 8\sqrt{n}}{7\,\sqrt[25]{n^{61}} + 6n^{\sqrt{6}} - 2n}\,.$$

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA Brasília, 2 de dezembro de 2008.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA -IE

$4^{\underline{a}}$ prova em "CALCULO II"

2º período de 2008

TURMA **C**

NOME: MATRÍCULA:

RESOLVAM 05 (CINCO) DOS SEGUINTES PROBLEMAS

1) Determinar o limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+2}\right)^{n^2}$. **Sugestão**: Façam $2n^2+2=m$.
Controle seu resultado com o valor numérico obtido para, por exemplo, $n=2^5$.

2) Seja $\alpha \in I\!\!R$ tal que $\alpha \neq k\pi$ com $k \in Z\!\!\!Z$ e seja $n \in I\!\!N$.
Deteminar (em dependência de $\cos\alpha$) o *limite da série*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \cos^k\alpha = \cos^{n+1}\alpha + \cos^{n+2}\alpha + \cos^{n+3}\alpha + \ldots\ .$$

Observação: $\cos^k\alpha$ deve ser lido como $(\cos\alpha)^k$.

3) Comparando-se a soma parcial $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ com a integral
$\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$, *mostrar que vale a estimativa*

$$3\sqrt[3]{n}-3 < s_n < 3\sqrt[3]{n}-2\ .$$

4) Determinar *o limite* da série $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k} = \frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\ .$

Sugestão : Lembrar que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \pm \ldots$, se $|x| < 1$.

5) Mostrar: a) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{\left(\sqrt[5]{k^3} + \operatorname{sen} k + 1\right)^2}$ *converge absolutamente*, enquanto

b) a série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\left(\sqrt[10]{k^3}-1\right)^3}$ *converge*, porém a convergência *não é absoluta*.

6) *Determinar a função* $y=f(x)$ cujo desenvolvimento de McLaurin é dado por

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k-1} = x + 2x^3 + 3x^5 + 4x^7\ldots\ .$$

Sugestão : Tem-se $x+2x^3+3x^5+4x^7\ldots = \frac{1}{2}\cdot(2x+4x^3+6x^5+8x^7\ldots)$.
Daí?

7) Determinar os *intervalos de convergência* da série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k}{e^k\cdot k!}\cdot\left(\lg\sqrt{|x|}\right)^k \qquad \text{(onde } \lg t \text{ significa } \log_{10} t\text{)}.$$