Lista de exercícios - RG1 - 31 de maio de 2023.

O corpo base é sempre $\mathbb{C}$.

(1) (Problem Set 1 de 2020-2). Para cada uma das seguintes listas $d_1, \ldots, d_k$, responda à pergunta: existe um grupo finito cujos graus dos caracteres irredutíveis complexos são exatamente $d_1, \ldots, d_k$? Se não, demonstre. Se sim, construa um tal grupo e mostre que os seus graus dos caracteres irredutíveis complexos são $d_1, \ldots, d_k$.
  (a) $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$.
  (b) $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3$.
  (c) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
  (d) $1, 1, 5, 5, 5, 5, 9, 9, 10, 10, 16, 16$.

(2) Seja χ um caractere de um grupo finito G. Mostre que o conjugado $\overline{\chi}$, ou seja a função $\overline{\chi} : G \to \mathbb{C}$ definida por $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)}$, é um caractere de G.

(3) Problema 3.17 do livro do Isaacs, foi mostrado por Burnside em 1911. Seja G um grupo finito com k classes de conjugação. Mostre que, se $|G|$ é ímpar, então $|G| \equiv k \mod 16$. [Dica: escreva $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$, use $|G| = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(1)^2$ e o fato que $\chi_i(1)$ divide $|G|$. Mostre que em G nenhum elemento não trivial é conjugado ao seu inverso.]

(4) Problema 3.3 do livro do Isaacs. Seja χ um caractere irredutível de um grupo simples não abeliano. Mostre que $\chi(1) \neq 2$. Pode ser $\chi(1) = 3$?

(5) Problema 2.16 do livro do Isaacs. Seja G um grupo finito abeliano e seja H um subgrupo de G. Suponha que o caractere (não necessariamente irredutível) χ de G satisfaz $\chi(g) = 0$ para todo $g \in G - H$. Mostre que $|G : H|$ divide $\chi(1)$. [Dica: como G é abeliano, se $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ então $\psi|_H \in \mathrm{Irr}(H)$.]

(6) Seja G um grupo finito com centro não trivial. Escreva $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ com $\chi_1(1) \leqslant \ldots \leqslant \chi_k(1)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.
  (a) $\chi_i(1) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ e $\chi_k(1) > 1$.
  (b) $|G| = 2^t$ com t ímpar, $Z(G) = G'$ e $|G'| = 2$.
  [Dica: mostre que toda classe lateral de G' é união de classes de conjugação de G.]