Lista de exercícios - RG1 - 07 de junho de 2023.

O corpo base é sempre $\mathbb{C}$.

Um caractere χ de G é dito real se $\chi(g) \in \mathbb{R}$ para todo $g \in G$. A classe de conjugação de g em G é dita real se contém g^{-1}.

(1) Mostre que o grupo finito G admite caracteres irredutíveis reais não triviais se e somente se $|G|$ é par.
(2) Seja G um grupo finito. Mostre que o número de caracteres irredutíveis reais de G é igual ao número de classes de conjugação reais de G. Para fazer isso, siga os seguintes passos. Seja M a tabela dos caracteres de G, vista como matriz $k \times k$.
  (a) Mostre que se $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ então $\overline{\chi} \in \mathrm{Irr}(G)$.
  (b) Mostre que existem matrizes inversíveis P, Q tais que
$$PM = \overline{M} = MQ.$$
  (c) Mostre que M é inversível e deduza que $Q = M^{-1}PM$.
  (d) Conclua o argumento expressando o número de caracteres reais em função de P.
(3) Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação irredutível de G e seja χ o seu caractere. Temos a decomposição $\chi^2 = \chi_S + \chi_A$ sendo χ_S o caractere do quadrado simétrico de χ e χ_A o caractere do quadrado alternado de χ. Suponha que $\chi(1) = 2$.
  (a) Mostre que $\chi_A(g) = \det(\rho(g))$ para todo $g \in G$.
  (b) Mostre que $\nu_2(\chi) = -1$ se e somente se $\det(\rho(g)) = 1$ para todo $g \in G$.
(4) Seja G um grupo finito contendo um elemento g de ordem 2 tal que $C_G(g) = \{1, g\}$. Mostre que $|G : G'| = 2$.
(5) Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação irredutível do grupo finito G. Mostre que, se ρ é injetiva, então o centro $Z(G)$ é cíclico. [Dado $z \in Z(G)$ mostre que ρ_z é escalar.]
(6) Problema 2.5 do livro do Isaacs. Construa explicitamente uma representação irredutível $\rho : Q_8 \to \mathrm{GL}(V)$ de dimensão 2. Mostre que não existe nenhuma representação $\tau : Q_8 \to \mathrm{GL}(W)$ isomorfa a ρ (ou seja $V \cong W$ como $\mathbb{C}[Q_8]$-módulos) e tal que os coeficientes da matriz $\tau(g)$ são reais para todo $g \in Q_8$. Se colocarmos D_8 no lugar de Q_8, o que acontece?
(7) Construa a tabela de caracteres de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$, que é o grupo das matrizes inversíveis 3×3 com coeficientes em $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. [É um grupo simples de ordem 168 e tem 6 classes de conjugação.]