Lista de exercícios - RG1 - 14 de junho de 2023.

O corpo base é sempre $\mathbb{C}$ e G é sempre um grupo finito. Lembre-se de usar a reciprocidade de Frobenius.

(1) Seja $p \in \{2,3\}$ e seja P um p-subgrupo de Sylow de $G = S_4$, assim $P \cong C_3$ para $p = 3$ e $P \cong D_8$ para $p = 2$. Calcule o caractere induzido ψ^G para todo $\psi \in \mathrm{Irr}(P)$ nos dois casos $p = 2$ e $p = 3$.

(2) (Problema 5.4 do livro do Isaacs) Defina

$$f(G) := \max\{\chi(1) \ : \ \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}.$$

Seja $H \leqslant G$. Mostre que $f(H) \leqslant f(G) \leqslant |G : H| \cdot f(H)$. Deduza que, se H é abeliano, então $f(G) \leqslant |G : H|$.

(3) Seja χ um caractere de G e seja ψ uma componente irredutível de χ. Mostre que $\ker(\chi) \leqslant \ker(\psi)$.

(4) Seja H um subgrupo de G, seja $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ e suponha que $\ker(\chi)H = G$. Mostre que $\chi|_H \in \mathrm{Irr}(H)$.

(5) (Problema 5.16 do livro do Isaacs) Seja H um subgrupo maximal do grupo finito G e seja $\chi = (1_H)^G$. Seja $\psi \neq 1_G$, $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$, uma componente irredutível de χ. Mostre que $\ker(\psi) = \ker(\chi)$. [Use o fato que $\ker(\chi)$ é o coração normal de $\ker(1_H) = H$ em G.]

(6) (Problema 5.14 do livro do Isaacs) Seja G um grupo finito e seja m o menor grau de um caractere irredutível não linear de G. Mostre que, se $|G'| \leqslant m$, então $G' \leqslant Z(G)$. [Use o fato que as classes laterais de G' são uniões de classes de conjugação de G para mostrar que toda classe de conjugação de G tem tamanho no máximo m. Considere um estabilizador H de ponto da ação de conjugação de G em si mesmo. Mostre que G' está contido no núcleo de $(1_H)^G$.]

(7) Sejam G um grupo finito, $H \leqslant G$. Seja χ um caractere de G e seja ψ um caractere de H. Mostre que $(\psi \cdot \chi|_H)^G = \psi^G \cdot \chi$. [Dica: faça o produto interno dos dois lados com um qualquer $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$.]

(8) Seja F um corpo finito e considere o grupo multiplicativo $F^* = F - \{0\}$ agindo sobre F por multiplicação.
   (a) Mostre que o grupo $G = F \rtimes F^*$ (com a ação descrita) admite um único caractere irredutível não linear χ e calcule o seu grau.
   (b) Mostre que se $g \in G$ é escrito como vh com $v \in F$, $h \in F^*$, então $\chi(g) \neq 0$ se e somente se $h = 1$.

(9) Sejam G um grupo finito, p o menor divisor primo de $|G|$, k o número de classes de conjugação de G e G' o subgrupo derivado de G. Mostre que

$$|G : G'| \leqslant k \leqslant |G : G'| + \frac{|G| - |G : G'|}{p^2}$$

A lista de exercícios terminou, mas veja a próxima página.

Vou dar algumas indicações para calcular a tabela dos caracteres de $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$. G é um grupo simples de ordem

$$|G| = (2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 2^2) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168.$$

Considere os seis elementos de G

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os elementos $g_1, \ldots, g_6$ têm ordem $1, 2, 4, 7, 7, 3$ respectivamente, e são representantes distintos das 6 classes de conjugação de G. Os tamanhos das classes de conjugação g_1^G, …, g_6^G são 1, 21, 42, 24, 24, 56 respectivamente, e os ordens dos centralizadores são 168, 8, 4, 7, 7, 3 respectivamente. Seja $V = \mathbb{F}_2^3$. Observe que G age naturalmente por multiplicação matricial no conjunto $V - \{0\}$.