Lista de exercícios - RG1 - 21 de junho de 2023.

O corpo base é sempre $\mathbb{C}$ e G é sempre um grupo finito.

(1) Sejam $N \trianglelefteq G$, $H \leqslant G$ tais que $NH = G$ e $N \cap H = \{1\}$. Seja $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. Mostre que existe $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $\chi|_H = \psi$.

(2) Sejam $K \leqslant H \leqslant G$ e seja ψ um caractere de K. Mostre que $(\psi^H)^G = \psi^G$.

(3) Seja $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ não linear. Mostre que $\chi \cdot \overline{\chi} \notin \mathrm{Irr}(G)$.

(4) É verdade que todo subgrupo normal de G é núcleo de uma representação irredutível de G?

(5) Sejam $N \trianglelefteq G$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, ψ o caractere de G inflado pelo caractere da representação regular de G/N. Em outras palavras $\psi(g) = |G/N|$ se $g \in N$ e $\psi(g) = 0$ se $g \notin N$. Mostre que $(\chi|_N)^G = \psi \cdot \chi$.

(6) Seja H um subgrupo de G e seja ψ um caractere de H. Mostre que, se ψ^G é irredutível, então ψ é irredutível.

(7) Sejam $H \trianglelefteq G$, $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$. Suponha que $\theta^x = \theta$ para todo $x \in G$. Seja $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ uma componente irredutível de θ^G. Mostre que $\chi|_H = n\theta$ onde $n = [\chi|_H, \theta]$.

(8) Seja H um subgrupo normal de G com $|G : H| = 2$ e seja $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$. Mostre que θ^G é irredutível ou soma de dois irredutíveis distintos α, β tais que $\alpha|_H = \beta|_H = \theta$.

(9) Um grupo G é dito supersolúvel se existem $H_i \trianglelefteq G$, $i = 1, \ldots, n$, tais que $H_1 = \{1\}$, $H_n = G$, $H_i \leqslant H_{i+1}$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ e H_{i+1}/H_i é cíclico para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Mostre que a supersolubilidade pode ser detectada pela tabela dos caracteres.

(10) (Problema 6.2 do livro do Isaacs) Suponha G/N abeliano, $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$. Sejam $\chi_1, \ldots, \chi_t$ os caracteres lineares de G inflados de G/N. Mostre que $\theta^G = n \sum_{\chi \in I} \chi$ onde $I = \{\psi\chi_i \ : \ i = 1, \ldots, t\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$. [Seja α a composição entre $G \to G/N$ e a representação regular de G/N, assim $(\psi|_N)^G = \psi\alpha$. Mostre que θ^G é uma componente de $\psi\alpha$. Note que $|I|$ pode ser menor que t.]

(11) Mostre que, se $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ é fiel, ou seja $\ker(\chi) = \{1\}$, então o centro de G é igual a $\{g \in G \ : \ |\chi(g)| = \chi(1)\}$.

(12) $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ é dito primitivo se $\chi \neq \psi^G$ para todo caractere ψ de todo subgrupo próprio H de G. Suponha que $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ é primitivo. Mostre os seguintes fatos.
   (a) Se $N \trianglelefteq G$, então $\chi|_N = n\theta$ onde $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$, $n = [\chi|_N, \theta]$. [Pode usar o teorema sobre os caracteres induzidos de $I_G(\theta)$.]
   (b) χ induz um caractere irredutível primitivo e fiel de $G/\ker(\chi)$.
   (c) Se χ é fiel, então todo subgrupo normal abeliano de G está contido no centro de G. [Use o exercício anterior.]

(13) Mostre que todo caractere linear de G é primitivo. Mostre que, se G é um p-grupo, então todo caractere irredutível primitivo de G é linear. [Mostre que, se N é um subgrupo normal abeliano de G de ordem máxima, então $C_G(N) = N$. Use o item anterior.]