Resolução da primeira prova de Álgebra 1 Turma C do 26/04/2019

1. **Exercício 1 [2 pontos]**.

   Seja $f : X \to Y$ uma função. Lembre-se que a imagem de $A \subseteq X$ por meio de f é o conjunto

   $$f(A) = \{f(a) \ : \ a \in A\} \subseteq Y.$$

   Suponha $f : X \to Y$ injetiva e sejam $A, B \subseteq X$. Mostre que

   $$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

   Um ponto para cada inclusão.

   Primeira inclusão: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Se $y \in f(A \cap B)$ então existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in A$ temos $y = f(x) \in f(A)$, e como $x \in B$ temos $y = f(x) \in f(B)$, logo $y \in f(A) \cap f(B)$.

   Segunda inclusão: $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Se $y \in f(A) \cap f(B)$ então existem $a \in A$, $b \in B$ tais que $y = f(a)$ e $y = f(b)$, logo $f(a) = y = f(b)$ e como f é injetiva isso implica $a = b$. Mas $a \in A$ e $b \in B$ logo $a = b$ implica $a = b \in A \cap B$, segue que $y = f(a) \in f(A \cap B)$.

2. **Exercício 2 [2 pontos]**.

   Seja $f : X \to X$ uma função e seja R a relação de X definida por xRy se e somente se $f(x) = y$. Mostre que

   (a) (1 ponto) se R é simétrica então f é bijetiva.

   Seja $x \in X$, temos $xRf(x)$ logo $f(x)Rx$ sendo R simétrica ou seja $f(f(x)) = x$. Se $a, b \in X$ e $f(a) = f(b)$ então $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$, logo f é injetiva. Se $y \in X$ então $y = f(f(y))$ logo f é sobrejetiva.

   (b) (1 ponto) se R é transitiva então R é antisimétrica.

   Sejam $x, y \in X$ e suponha xRy e yRx, queremos mostrar que $x = y$. Como xRy e yRx sendo R transitiva temos xRx. Mas xRy significa $y = f(x)$, yRx significa $f(y) = x$ e xRx significa $f(x) = x$. Segue que $y = f(x) = x$.

3. **Exercício 3 [3 pontos]**.

   Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e seja $\star$ a operação de $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

   $$(a, b) \star (c, d) := (4ac, b + d + 1).$$

   (a) (1 ponto) Mostre que $\star$ é associativa e comutativa.

   $\star$ é comutativa porque $(a, b) \star (c, d) = (4ac, b + d + 1)$ e $(c, d) \star (a, b) = (4ca, d + b + 1)$ são iguais sendo $4ac = 4ca$ e $b + d + 1 = d + b + 1$ (soma e multiplicação entre números reais são comutativas). Para mostrar que $\star$ é associativa precisamos mostrar que $((a,b)\star(c,d))\star(e,f) = (a,b)\star((c,d)\star(e,f))$ para todo $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. Temos

$$((a,b)\star(c,d))\star(e,f) = (4ac, b+d+1)\star(e,f) = (4(4ac)e, (b+d+1)+f+1),$$

$$(a,b)\star((c,d)\star(e,f)) = (a,b)\star(4ce, d+f+1) = (4a(4ce), b+(d+f+1)+1)$$

são iguais porque $4(4ac)e = 4a(4ce)$ e $(b+d+1)+f+1 = b+(d+f+1)+1$.

(b) (1 ponto) Encontre o seu elemento neutro e. Chamando de $e = (r,s)$ temos $x \star e = x$ para todo $x \in A$, ou seja $(a,b)\star(r,s) = (a,b)$ para todo $(a,b) \in A$. Segue que $(4ar, b+s+1) = (a,b)$ ou seja $4ar = a$ e $b+s+1 = b$ para todo $(a,b) \in A$. Da segunda igualdade segue $s = -1$, e como a primeira, $4ar = a$, vale para todo $a \in \mathbb{R}$, em particular vale para $a = 1$ logo $4r = 1$ ou seja $r = 1/4$. Segue que $e = (1/4, -1)$. Por outro lado $(1/4,-1)$ é elemento neutro pois $(a,b)\star(1/4,-1) = (4a(1/4), b+(-1)+1) = (a,b)$.

(c) (1 ponto) Calcule o inverso de $z = (1,1)$, ou seja encontre $w \in A$ tal que $z \star w = e$. Escrevendo $w = (a,b)$ precisamos resolver a equação $(1,1)\star(a,b) = (1/4,-1)$, ou seja $(4a, b+2) = (1/4,-1)$. Dois pares ordenados são iguais se e somente se as duas componentes são iguais, logo $4a = 1/4$ e $b+2 = -1$, segue que $a = 1/16$ e $b = -3$, ou seja o inverso de $(1,1)$ é $(1/16,-3)$.

4. **Exercício 3 [3 pontos]**.

(a) (1 ponto) Encontre inteiros a,b tais que $57a + 33b = 3$.
Algoritmo de Euclides.

57	33	
1	0	57
0	1	33
1	-1	24
-1	2	9
3	-5	6
-4	7	3

Segue que $-4 \cdot 57 + 7 \cdot 33 = 3$.

(b) (1 ponto) Resolva a equação $3x \equiv 2 \mod 11$.
Sendo $3 \cdot 4 = 12 \equiv 1 \mod 11$ o inverso de 3 módulo 11 é 4. Multiplicando os dois lados por 4 obtemos $x \equiv 8 \mod 11$, logo $8 \mod 11$ é a única solução da equação.

(c) (1 ponto) Resolva a equação $12x \equiv 8 \mod 44$.
Dividindo tudo por 4 obtemos $3x \equiv 2 \mod 11$ que tem como única solução $x \equiv 8 \mod 11$ (pelo item anterior), logo as soluções são 8, $8+11 = 19$, $19+11 = 30$, $30+11 = 41$ (módulo 44).