Segunda prova **ÁLGEBRA 1 Turma C** **31/05/2019**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

Cada item vale 1 ponto.

1. Seja G um grupo (notação multiplicativa) e sejam $g \in G$ e $H \leq G$. Defina

   $$K = \{gxg^{-1} \ : \ x \in H\}.$$

   Mostre que $K \leq G$.

   $1 \in K$ pois $1 = g1g^{-1}$, se $gxg^{-1} \in K$ então $(gxg^{-1})^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in K$ sendo $x^{-1} \in H$ (pois $x \in H$ e H é subgrupo), e se $gxg^{-1}, gyg^{-1} \in K$ então $gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} \in H$ sendo $xy \in H$ (pois $x, y \in H$ e H é subgrupo).

2. Dado um grupo cíclico $G = \langle y \rangle$ de ordem 18 calcule a ordem de y^7.

   $o(y^7) = 18/MDC(18, 7) = 18$.

3. Dado um grupo cíclico $G = \langle h \rangle$ de ordem 14 calcule a ordem de h^4.

   $o(h^4) = 14/MDC(14, 4) = 14/2 = 7$.

4. Lembre-se que $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ é o grupo multiplicativo dos elementos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que admitem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Conte os elementos de ordem 9 no grupo $U(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})$.

   $G = U(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ tem ordem 6, e 9 não divide 6, logo G não tem elementos de ordem 9 (pois a ordem de um elemento sempre divide a ordem do grupo).

5. Conte os subgrupos de $U(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$.

   $U(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ tem ordem 10. É cíclico gerado por 2, de fato $2^2 = 4 \neq 1$ e $2^5 = 32 = 10 \neq 1$ logo $o(2) = 10$ pois $o(2)$ divide 10 (a ordem de um elemento sempre divide a ordem do grupo), segue que $U(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) = \langle 2 \rangle$. O número de subgrupos de um grupo cíclico de ordem 10 é igual ao número de divisores de 10, neste caso 4, pois os divisores de 10 são 1, 2, 5 e 10.

6. Encontre um grupo com exatamente 6 subgrupos.

   O número de subgrupos de um grupo cíclico de ordem n é igual ao número de divisores de n. Logo basta encontrar um n com exatamente 6 divisores. $n = 12$ tem 6 divisores, são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Logo C_{12} tem exatamente 6 subgrupos.

7. Dado um grupo cíclico $G = \langle y \rangle$ de ordem 18 conte os elementos de G de ordem 9.

   Os elementos de G de ordem 9 são da forma y^k com $o(y^k) = 9$, ou seja $18/MDC(k, 18) = 9$ ou seja $MDC(k, 18) = 2$. Segue que k pode ser 2, 4, 8, 10, 14, 16. Segue que tem 6 elementos de ordem 9, eles são x^2, x^4, x^8, x^{10}, x^{14}, x^{16}.

8. Seja $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ com as operações usuais de soma e produto de classes. Seja
$$G = \{(a, b) \in A \times A \ : \ a \neq 0\}.$$
   Sabendo que a operação
$$(a, b) \star (c, d) := (ac, b + d)$$
   é associativa (não precisa mostrar isso) mostre que G é um grupo com a operação $\star$ (com elemento neutro $(1, 0)$).

   Temos $(a, b)\star(1, 0) = (a1, b+0) = (a, b)$ e $(1, 0)\star(a, b) = (1a, 0+b) = (a, b)$ logo $(1, 0)$ é elemento neutro. Para terminar precisamos mostrar que todo $(a, b) \in G$ tem inverso, ou seja precisamos procurar $(x, y) \in G$ tal que $(a, b)\star(x, y) = (1, 0)$, que pode ser escrito como $(ax, b+y) = (1, 0)$. Segue $ax = 1$ e $b + y = 0$ ou seja $x = a^{-1}$ e $y = -b$. O elemento a^{-1} existe em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ porque $a \neq 0$ e todo elemento não nulo de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ admite inverso ($1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$). Segue que o inverso de (a, b) é $(a^{-1}, -b)$.

9. Dado o grupo G do item anterior calcule a ordem do elemento $(2, 1)$.

   $(2, 1)^2 = (2, 1) \star (2, 1) = (2^2, 1 + 1) = (1, 2)$, $(2, 1)^3 = (2, 1)^2 \star (2, 1) = (1, 2) \star (2, 1) = (2, 2 + 1) = (2, 0)$, $(2, 1)^4 = ((2, 1)^2)^2 = (1, 2)^2 = (1, 2) \star (1, 2) = (1, 1)$, $(2, 1)^5 = (2, 1)^4 \star (2, 1) = (1, 1) \star (2, 1) = (2, 2)$, $(2, 1)^6 = (2, 1)^5 \star (2, 1) = (2, 2) \star (2, 1) = (1, 0)$. Segue que a ordem de $(2, 1)$ é 6.

10. O grupo G do item 8 é cíclico?

    Os elementos de G são $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$. Segue que a ordem de G é 6. Pelo item anterior o elemento $(2, 1)$ tem ordem $6 = |G|$. Segue que G é cíclico.