Terceira prova **ÁLGEBRA 1 Turma C** **05/07/2019**

Nome e matrícula:

Justificar todas as respostas.
Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (2 pontos) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

para todo $n \geq 2$.

2. (1 ponto) Conte os polinômios de grau 1 em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

3. (1 ponto) Faça a divisão com resto entre $X^3 + 2X + 2$ e $X + 1$ em $\mathbb{Q}[X]$.

4. (1 ponto) Conte os ideais de $\mathbb{Q}[X]$ contendo o ideal principal (X^2+6X+9).

5. (1 ponto) Fatore $X^3 - 3$ em fatores irredutíveis em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

6. Seja

$$A = \left\{\frac{r}{s} \;:\; r, s \in \mathbb{Z},\; s \text{ é ímpar}\right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Observe que $\mathbb{Z} \subseteq A$ porque se $r \in \mathbb{Z}$ então $r = \frac{r}{1} \in A$.

(a) (1 ponto) Mostre que se a, b pertencem a A então $a + b \in A$.

(b) (1 ponto) A é um anel com as operações usuais de soma e produto entre frações (não precisa mostrar isso). Lembre-se que $U(A)$ é o conjunto dos elementos inversíveis de A, ou seja os elementos de A que admitem inverso multiplicativo em A. Quais dos elementos seguintes pertencem a $U(A)$? Justifique.

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{12}{7}, \quad \frac{13}{11}.$$

(c) (1 ponto) Seja I o ideal principal gerado por 2,

$$I = (2) = \{2a \;:\; a \in A\} = \{\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \;:\; \text{r é par, s é ímpar}\}.$$

Seja J um ideal de A não contido em I. Mostre que $J = A$.

(d) (1 ponto) Seja J um ideal de A e suponha que $8 \in J$ e $4 \notin J$. Mostre que J é igual ao ideal principal gerado por 8, ou seja que $J = (8)$.