Resolução da terceira prova de Álgebra 1 - 2019-1

1. (2 pontos) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

para todo $n \geq 2$.

A base da indução é $n = 2$, temos $\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^2 1 + (-1)^3 2^2 = 1 - 4 = -3$ e $(-1)^{2+1}\frac{1}{2}2(2+1) = -3$ são iguais. Agora seja $A(n)$ a igualdade no enunciado, mostraremos que $A(n)$ implica $A(n+1)$, ou seja que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{n+2}\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Suponha $A(n)$ verdadeiro. Temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1}\frac{1}{2}n(n+1) + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1}\frac{1}{2}(n+1)(n-2(n+1)) \\ &= (-1)^{n+2}\frac{1}{2}(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

2. (1 ponto) Conte os polinômios de grau 1 em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

Um polinômio de grau 1 em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$ é da forma $aX + b$ com $a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e $a \neq 0$. Logo temos $5 - 1 = 4$ escolhas para a e 5 escolhas para b, segue que o número de polinômios de grau 1 é $4 \cdot 5 = 20$.

3. (1 ponto) Faça a divisão com resto entre $X^3 + 2X + 2$ e $X + 1$ em $\mathbb{Q}[X]$.

$$
\begin{array}{c|c}
X^3+2X+2 & X+1 \\
X^3+X^2 & X^2-X+3 \\
\hline
-X^2+2X+2 & \\
-X^2-X & \\
\hline
3X+2 & \\
3X+3 & \\
\hline
-1 &
\end{array}
$$

4. (1 ponto) Conte os ideais de $\mathbb{Q}[X]$ contendo o ideal principal (X^2+6X+9).

   Seja $P(X) = X^2+6X+9 = (X+3)^2$. Ele admite três divisores mônicos, 1, $X+3$ e $(X+3)^2$. Segue que os ideais de $\mathbb{Q}[X]$ contendo $(P(X))$ são (1), $(X+3)$ e $(P(X))$.

5. (1 ponto) Fatore X^3-3 em fatores irredutíveis em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

   Seja $P(X) = X^3-3$, temos $P(2) = 5 = 0$ logo $X-2$ divide X^3-3.

$$
\begin{array}{c|c}
X^3-3 & X-2 \\
X^3-2X^2 & X^2+2X+4 \\
\hline
2X^2-3 & \\
2X^2-4X & \\
\hline
4X-3 & \\
4X-8 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

   O quociente $Q(X) = X^2+2X+4$ é irredutível pois tem grau 2 e não tem raízes em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sendo $Q(0)=4$, $Q(1)=2$, $Q(2)=2$, $Q(3)=4$, $Q(4)=3$. Logo a fatoração de X^3-3 em fatores irredutíveis é $(X-2)(X^2+2X+4)$.

6. Seja
$$A = \left\{ \frac{r}{s} \ : \ r, s \in \mathbb{Z},\ s \text{ é ímpar} \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$
   Observe que $\mathbb{Z} \subseteq A$ porque se $r \in \mathbb{Z}$ então $r = \frac{r}{1} \in A$.

   (a) (1 ponto) Mostre que se a, b pertencem a A então $a+b \in A$.

   Se $a = r/s$ e $b = u/v$ pertencem a A então s e v são ímpares, e $a+b = (rv+su)/(sv)$ pertence a A pois sv é ímpar, sendo s e v ímpares. De fato escrevendo $s = 2n+1$ e $v = 2m+1$ temos que $sv = 2nm+2n+2m+1 = 2(nm+n+m)+1$ é ímpar.

(b) (1 ponto) A é um anel com as operações usuais de soma e produto entre frações (não precisa mostrar isso). Lembre-se que $U(A)$ é o conjunto dos elementos inversíveis de A, ou seja os elementos de A que admitem inverso multiplicativo em A. Quais dos elementos seguintes pertencem a $U(A)$? Justifique.

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{12}{7}, \quad \frac{13}{11}.$$

$3/2$ não pertence a $U(A)$ pois não pertence a A, $2/3$ pertence a A mas não pertence a $U(A)$ pois o seu inverso $3/2$ não pertence a A, $1/5$ pertence a $U(A)$ pois pertence a A e o seu inverso $5 = 5/1$ pertence a A, $12/7$ pertence a A mas não pertence a $U(A)$ pois o seu inverso $7/12$ não pertence a A, e $13/11$ pertence a $U(A)$ pois pertence a A e o seu inverso $11/13$ pertence a A.

(c) (1 ponto) Seja I o ideal principal gerado por 2,

$$I = (2) = \{2a \ : \ a \in A\} = \{r/s \in \mathbb{Q} \ : \ \text{r é par, s é ímpar}\}.$$

Seja J um ideal de A não contido em I. Mostre que $J = A$.

Seja $r/s \in A$, queremos mostrar que $r/s \in J$. Por hipótese J não está contido em I, logo existe $u/v \in J - I$, ou seja $u/v \in J$ e u é ímpar (os elementos de I têm a forma p/q com p par e q ímpar). Segue que $v/u \in A$ sendo u ímpar, e $r/s = (r/s)(v/u)(u/v) \in J$ pelo segundo axioma da definição de ideal, sendo $(r/s)(v/u) \in A$ e $u/v \in J$.

(d) (1 ponto) Seja J um ideal de A e suponha $8 \in J$ e $4 \notin J$. Mostre que J é igual ao ideal principal gerado por 8, ou seja que $J = (8)$.

A inclusão $(8) \subseteq J$ segue do segundo axioma da definição de ideal, sendo $8 \in J$. Seja agora $r/s \in J$, queremos mostrar que $r/s \in (8)$ ou seja que 8 divide r. Se 8 não divide r então r tem a forma m, $2m$ ou $4m$ com m ímpar. Em todo caso r divide $4m$ logo $4m/s \in J$ (pois $4m/s$ é obtido multiplicando r/s por um inteiro, que em particular é um elemento de A). Mas sendo m ímpar $s/m \in A$ logo $4 = 4(m/s)(s/m) \in J$ sendo $4m/s \in J$ e $s/m \in A$, logo $4 \in J$, que contradiz a hipótese.