Algebra 2 $\quad$ I^a prova $\quad$ 14/04/2016

(1) $x = (153)(7245)(214) \in S_9$

$y = (2987)(731)(2569) \in S_9$

$\boxed{a}$ O grupo simétrico de grau n é o grupo das funções bijetivas $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ com a operação de composição.

$\boxed{b}$ $$\left.\begin{array}{l} x = (153)(7245)(214) = (13)(257) \\ y = (2987)(731)(2569) = (1256873) \end{array}\right\} \text{(produtos de ciclos disjuntos)}$$

Logo $o(x) = \text{mmc}(2,3) = 6$, $o(y) = 7$.

$\boxed{c}$ Temos $x = (13)(257)$, $y = (1256873)$ logo

$xyx^{-1} = (3576821)$, $\quad yxy^{-1} = (21)(563)$

(apliquei o fato que $g(i_1 \cdots i_k)g^{-1} = (g(i_1) \cdots g(i_k))$ e que $gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1}$)

$\boxed{d}$ Temos $\langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} =$

$= \{1, (13)(257), (275), (13), (257), (13)(275)\}$

logo $yxy^{-1} = (21)(563) \notin \langle x \rangle \implies \langle x \rangle \ntrianglelefteq S_9$.

Temos $\langle y \rangle = \{1, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6\} =$

$= \{1, (1256873), (1583267), (1635728), (1827536), (1762385), (1378652)\}$

logo $xyx^{-1} = (3576821) = (1357682) \notin \langle y \rangle$.

$\boxed{e}$

$sgn(x) = sgn((13)(257)) = sgn((13))\, sgn((257)) = (-1)\cdot 1 = -1$
logo $x \notin A_9$ (pois $A_9 = \{g \in S_9 : sgn(g) = 1\}$).
$sgn(x)$ pode se calcular também assim:
$sgn(x) = sgn((153)(7245)(214)) = sgn((153))\, sgn((7245))\, sgn((214)) =$
$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.$

$sgn(y) = sgn((1256873)) = 1$. Logo $y \in A_9$.
$sgn(xy) = sgn(x)\, sgn(y) = (-1)\cdot 1 = -1$ logo $xy \notin A_9$.

(2)

Pelo teorema de isomorfismo $A/_{\ker(f)} \cong Im(f) = H \leq B$.
Pelo teorema de Lagrange $|H|$ divide $|B|$.
Se $|B|$ é impar então $|A : \ker(f)| = |A/_{\ker(f)}| = |H|$ divide $|B|$
logo $|A : \ker(f)|$ é impar também.

(3)

$\boxed{a}$ Temos $|G/N| = |G|/_{|N|}$ logo $|G| = |N| \cdot |G/N|$.
Se $|N|$ e $|G/N|$ são impares, o produto $|N|\cdot|G/N|$ é impar.

$\boxed{b}$

$C(N) \leq G$:

- $1 \in C(N)$ pois se $m \in N$, $1 \cdot m = m = m \cdot 1$
- se $x, y \in C(N)$, $xy \in C(N)$: de fato, se $m \in N$ então $(xy)m = xym = xmy = mxy = m(xy)$
- se $x \in C(N)$, $x^{-1} \in C(N)$: de fato, $x^{-1}m = (m^{-1}x)^{-1} =$
$= (xm^{-1})^{-1} = mx^{-1}$.

$C(N) \trianglelefteq G$: se $x \in C(N)$, $g \in G$ então $gxg^{-1} \in C(N)$: de fato se $m \in N$, $(gxg^{-1})m = gx(g^{-1}mg)g^{-1} = g(g^{-1}mg)xg^{-1} = m(gxg^{-1})$.

④

a) G é abeliano, pois como C_5 é cíclico, é abeliano e se $(a,b);(c,d) \in G$, $(a,b)(c,d) = (ac,bd) =$

$= (ca,db) = (c,d)(a,b)$.

b) $H \leq G$:

- $(1,1) \in H$ pois $1 = 1$
- se $(a,a),(b,b) \in H$, $(a,a)(b,b) = (ab,ab) \in H$.
- se $(a,a) \in H$, $(a,a)^{-1} = (a^{-1},a^{-1}) \in H$.

c) $f: G \longrightarrow C_5$, $f((a,b)) = ab^{-1} \in C_5$.

Homomorfismo: como G é abeliano,

$f((a,b))f((c,d)) = ab^{-1}cd^{-1} = acb^{-1}d^{-1} = (ac)(bd)^{-1} =$

$= f((ac,bd)) = f((a,b)(c,d))$.

d) $G/H \cong C_5$: como f é homomorfismo e

* $\ker(f) = H$ $\quad \left(\ker(f) = \{(a,b) \in G : ab^{-1} = 1\} = \right.$

$\left. = \{(a,b) \in G : a = b\} = H \right)$

* $\mathrm{Im}(f) = C_5$ $\quad$ (se $a \in C_5$, $a = f((a,1))$)

pelo teorema de isomorfismo $G/H \cong C_5$.

e) Pelo teorema fundamental dos grupos abelianos finitos os grupos abelianos de ordem $|G| = |C_5 \times C_5| = |C_5| \cdot |C_5| =$

$= 5 \cdot 5 = 25$ são C_{25} e $C_5 \times C_5$.

Então tem só 2 grupos abelianos de ordem $|G|$.