Primeira prova de Álgebra 2 – Semestre 2021-1 – 02/09/2021.

Sejam a, b, c os últimos três digitos do seu número de matrícula, nesta ordem! [1] Seja p o $(a + 7)$-esimo número primo.

Segue a lista dos primeiros 16 números primos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53

1. (1.5 ponto) Sejam $r := a + b + c + 12$, $s := r + 10$. Encontre $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que
$$rx + sy = \mathrm{MDC}(r, s).$$
2. (1 ponto) Conte os ideais do anel $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ onde $m = 4p$.
3. (1 ponto) Seja $I = (X^3 - p) \trianglelefteq \mathbb{Q}[X]$ o ideal principal de $\mathbb{Q}[X]$ gerado por $X^3 - p$. Encontre o inverso de $\overline{X} = X + I$ no anel $\mathbb{Q}[X]/I$.
4. (2.5 pontos) Sejam $L := S_3$ o grupo simétrico de grau 3, $N := A_3 \trianglelefteq L$ o grupo alternado de grau 3. Seja $\mathrm{sgn} : S_3 \to \{1, -1\}$ o homomorfismo "sinal", cujo núcleo é N. Considere
$$G := \{(x, y) \in L \times L \ : \ \mathrm{sgn}(x) = \mathrm{sgn}(y)\}.$$
É um subgrupo do produto direto $L \times L$ (não precisa mostrar isso).
   (a) (1 ponto) Mostre que $T = N \times \{1\}$ é um subgrupo normal de G.
   (b) (1.5 ponto) Mostre que $G/T \cong S_3$ e deduza o valor de $|G|$.
5. (2.5 pontos) Seja $\mathscr{T}$ o conjunto dos grupos finitos X tais que $q \leq p$ para todo divisor primo q da ordem de X (onde p é o número primo definido acima). Em outras palavras $X \in \mathscr{T}$ se e somente se nenhum divisor primo de $|X|$ é maior do que p.
   (a) (1 ponto) Diga se o grupo simétrico S_{p+3} pertence a $\mathscr{T}$.
   (b) (1.5 ponto) Sejam G um grupo finito, $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ e seja $N := N_1 \cap N_2$. Mostre que se $G/N_1 \in \mathscr{T}$ e $G/N_2 \in \mathscr{T}$ então $G/N \in \mathscr{T}$. [Dica: considere o homomorfismo de grupos $G \to G/N_1 \times G/N_2$ definido por $g \mapsto (gN_1, gN_2)$.]
6. (1.5 ponto) Seja $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ com as operações seguintes.
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1a_2 + pb_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2).$$
Sabendo que A com essas operações é um anel comutativo unitário, encontre os elementos neutros de A e mostre que A é um corpo.

[1] Por *exemplo*, se o seu número de matrícula é 210123456 então $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$ (mas esse é *apenas um exemplo*!!).