Segunda prova de Álgebra 2 – Semestre 2021-1 – 28/10/2021.

Sejam a, b, c os últimos três digitos do seu número de matrícula, nesta ordem! [1] **Seja p o número primo seguinte.**

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	3	5	7	5	3	5	7	5	3	5

1. (1 ponto) Fatore o polinômio
$$P(X) := X^3 + pX^2 - X - p$$
em fatores irredutíveis em $\mathbb{Z}[X]$.

2. (1 ponto) Fatore $(p^2 + 1)(14 - p)$ em fatores irredutíveis em $\mathbb{Z}[i]$.

3. (1 ponto) Mostre que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}((b + 2)i + \sqrt{3})$.

4. (1 ponto) Seja $P(X) := X^5 + 1 \in \mathbb{F}_7[X]$. Seja F uma extensão de $\mathbb{F}_7$ e seja $\alpha \in F$ tal que $P(\alpha) = 0$ e $\alpha \neq -1$. Seja $K := \mathbb{F}_7(\alpha) \subseteq F$. Diga se α é um gerador do grupo multiplicativo cíclico $K - \{0\}$. [Dica: Tem como responder sem ter que fatorar $P(X)$.]

5. (2 pontos) Seja
$$\alpha := \sqrt{2 + \sqrt{10}} \in \mathbb{R}_{>0}.$$
   (a) Calcule $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}|$.
   (b) Seja $E \subseteq \mathbb{C}$ o corpo de decomposição do polinômio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$. Calcule $|E : \mathbb{Q}|$.

6. (1 ponto) Considere $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ onde $\alpha := i\sqrt{p}$. Escreva o inverso de $\alpha + 1$ como polinômio de $\mathbb{Q}[X]$ avaliado em α.

7. (1 ponto) Mostre que existem dois polinômios irredutíveis $P_1(X), P_2(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ambos de grau $p + 2$ e tais que $P_1(X) + P_2(X) = X + 1$.

8. (1 ponto) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de
$$P(X) := X^7 + 7X + 6 \in \mathbb{Q}[X].$$
Mostre que $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha^3)$.

9. (1 ponto) Sejam E_1, E_2 duas extensões de $\mathbb{Q}$ contidas em $\mathbb{C}$. É verdade que se $|E_1 : \mathbb{Q}| = |E_2 : \mathbb{Q}|$ então os corpos E_1, E_2 são isomorfos?

[1] Por *exemplo*, se o seu número de matrícula é 210123456 então $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$ (mas esse é *apenas um exemplo*!!).