Primeira prova **ÁLGEBRA 3** **10/03/2022**

Escrever nome e matrícula em todas as folhas.

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (1.5 ponto) Considere o elemento $g = (123)(45)$ no grupo simétrico $G = S_6$. Calcule a ordem do centralizador $C_G(g)$.

2. (2 pontos) Seja $G = A_5$ o grupo alternado de grau 5. Lembre-se que G é um grupo simples não abeliano.

   (a) Diga se existe uma ação fiel de G sobre $X = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

   (b) Diga se existe uma ação transitiva de G sobre $Y = \{11, 15, 34\}$.

3. (3 pontos) Seja G um grupo. Mostre que G não é simples em cada um dos seguintes casos.

$$|G| = 56 = 2^3 \cdot 7.$$

$$|G| = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

$$|G| = 7 \cdot 13 \cdot p.$$

   Aqui p é um número primo qualquer.

4. (2 pontos) Seja G um grupo não abeliano de ordem 21.

   (a) Mostre que $Z(G) = \{1\}$, ou seja o centro de G é trivial.

   (b) Mostre que G contém exatamente 5 classes de conjugação.

5. (1.5 ponto) Dado um grupo finito G de ordem divisível pelo primo p, indicaremos com $n_p(G)$ o número de p-subgrupos de Sylow de G. Sejam A, B grupos finitos de ordens divisíveis pelo primo p. Mostre que

$$n_p(A \times B) = n_p(A) \cdot n_p(B).$$