Primeira prova **ÁLGEBRA 3** **10/03/2022**

Resolução.

1. (1.5 ponto) Considere o elemento $g = (123)(45)$ no grupo simétrico $G = S_6$. Calcule a ordem do centralizador $C_G(g)$.

   O grupo G contém $\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 120$ elementos de estrutura cíclica $(***)(**)$, e como no grupo simétrico dois elementos são conjugados se e somente se eles têm a mesma estrutura cíclica, o elemento g tem 120 conjugados. Aplicando o princípio da contagem obtemos que

   $$6!/|C_G(g)| = |G|/|C_G(g)| = |G : C_G(g)| = 120$$

   logo $|C_G(g)| = 6!/120 = 6$.

2. (2 pontos) Seja $G = A_5$ o grupo alternado de grau 5. Lembre-se que G é um grupo simples não abeliano.

   (a) Diga se existe uma ação fiel de G sobre $X = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

   Sim, pois G admite uma ação fiel sobre um conjunto de tamanho 6. De fato, G é um subgrupo de S_5 que é isomorfo a $K = \{g \in S_6 : g(6) = 6\} < S_6$. Segue que G é isomorfo a um subgrupo de S_6, ou seja temos um homomorfismo injetivo $G \to S_6$, que corresponde a uma ação fiel de G sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   (b) Diga se existe uma ação transitiva de G sobre $Y = \{11, 15, 34\}$.

   Não, pois se existisse então teriamos o homomorfismo associado $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(Y) \cong S_3$, que não é o homomorfismo trivial pois a ação é transitiva, e φ não é injetivo pois $|S_3| = 6 < 60 = |G|$. Segue que $\{1\} \neq \ker(\varphi) \neq G$, e isso contradiz o fato que $G = A_5$ é um grupo simples.

3. (3 pontos) Seja G um grupo. Mostre que G não é simples em cada um dos seguintes casos.

   $$|G| = 56 = 2^3 \cdot 7.$$

   Pelo teorema de Sylow $n_7 \in \{1, 8\}$ e podemos supor $n_7 \neq 1$ pois se $n_7 = 1$ então o 7-Sylow é normal. Como os 7-Sylow têm ordem 7, dois quaisquer 7-Sylow têm interseção trivial, logo G contém exatamente $8 \cdot 6 = 48$ elementos de ordem 7. Segue que G contém $56 - 48 = 8$ elementos de ordem diferente de 7. Como os 2-Sylow de G têm ordem 8, tem espaço em G para um único 2-Sylow, que então é normal. Logo G não é simples.

   $$|G| = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

   Temos que n_5 divide $2^3 \cdot 3$ e é congruente a 1 módulo 5, logo $n_5 \in \{1, 6\}$. Se $n_5 = 1$ então o 5-Sylow é normal, logo G não é simples. Se $n_5 = 6$ então o normalizador H de um 5-Sylow P tem índice $|G : H| = n_5 = 6$ e o coração normal H_G é trivial se G é simples, pois $H_G \trianglelefteq G$ e $H_G \leq H < G$. Temos então o homomorfismo de Cayley $G \to S_6$ que é injetivo, logo G é isomorfo a um subgrupo de S_6, contradição pois $|G|$ não divide $|S_6| = 6!$, pois 5^2 divide $|G|$ mas não divide $6!$. Logo G não é simples.

$$|G| = 7 \cdot 13 \cdot p.$$

Aqui p é um primo qualquer.

Usaremos o teorema de Sylow. Se $p \notin \{7, 13\}$ então n_p divide $7 \cdot 13 = 91$, logo $n_p \in \{1, 7, 13, 91\}$, e $n_p \equiv 1 \mod p$, assim $n_p = 1$ ou $p \in \{2, 3, 5\}$. Se $n_p = 1$ então o p-Sylow é normal e G não é simples. Falta estudar o caso em que $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$.

Se $p \in \{3, 5, 7, 13\}$ então $n_{13} = 1$. Se $p = 2$ então $n_7 = 1$.

4. (2 pontos) Seja G um grupo não abeliano de ordem 21.

   (a) Mostre que $Z(G) = \{1\}$.
   Se $G/Z(G)$ é cíclico então G é abeliano (como visto nas aulas), contradição. Segue que $G/Z(G)$ não é cíclico, logo não tem ordem prima. Por outro lado $|G/Z(G)| = |G : Z(G)|$ divide $|G| = 3 \cdot 7$ e é diferente de 1 pois $G \neq Z(G)$ (sendo G não abeliano), logo $|G/Z(G)| = |G|$, ou seja $Z(G) = \{1\}$.

   (b) Mostre que G contém exatamente 5 classes de conjugação.
   Como $Z(G) = \{1\}$, o conjunto $\{1\}$ é a única classe de conjugação de G de tamanho 1. Sabemos que os tamanhos das classes de conjugação de G são divisores de $|G|$ (são índices de centralizadores) e não são iguais a $|G|$ porque G não é uma classe de conjugação de G (pois contém a classe $\{1\}$). Segue que toda classe de conjugação de G diferente de $\{1\}$ tem tamanho 3 ou 7. Seja $a \geq 0$ o número de classes de conjugação de G de tamanho 3 e seja $b \geq 0$ o número de classes de conjugação de G de tamanho 7. Como G é a união disjunta das suas classes de conjugação, podemos escrever

   $$1 + 3a + 7b = |G| = 21.$$

   (Isso nada mais é que a equação das classes.) Como a e b são inteiros não negativos, a única solução desta equação é $a = b = 2$. Segue que G contém $1 + 2 + 2 = 5$ classes de conjugação (uma de tamanho 1, duas de tamanho 3 e duas de tamanho 7).

5. (1.5 ponto) Dado um grupo finito G de ordem divisível pelo primo p, indicaremos com $n_p(G)$ o número de p-subgrupos de Sylow de G. Sejam A, B grupos finitos de ordens divisíveis pelo primo p. Mostre que

$$n_p(A \times B) = n_p(A) \cdot n_p(B).$$

Sejam P um p-Sylow de A, Q um p-Sylow de B. É claro que $P \times Q$ é um p-Sylow de $A \times B$, e pelo teorema de Sylow os p-Sylow de $A \times B$ são exatamente os conjugados de $P \times Q$ em $A \times B$. Dado $(a, b) \in A \times B$, temos

$$(a, b) \cdot P \times Q \cdot (a, b)^{-1} = aPa^{-1} \times bQb^{-1},$$

logo, pelo teorema de Sylow de novo, os p-Sylow de $A \times B$ são exatamente os subgrupos de $A \times B$ do tipo $X \times Y$ onde X é um p-Sylow de A e Y é um p-Sylow de B. Tem $n_p(A)$ possibilidades para X e tem $n_p(B)$ possibilidade para Y, logo $n_p(A \times B) = n_p(A) \cdot n_p(B)$.