Segunda prova **ÁLGEBRA 3** **28/04/2022**

Escrever nome e matrícula em todas as folhas.

Sejam a, b, c os últimos três digitos do seu número de matrícula, nesta ordem! [1] Defina $n := 4(a + (9 - b) + c) + 2$.

Todos os corpos considerados contêm $\mathbb{Q}$ como subcorpo. O discriminante de $X^3 + pX + q$ é $-4p^3 - 27q^2$. A resolvente cúbica de $X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ é $X^3 - a_2X^2 + (a_3a_1 - 4a_0)X - a_3^2a_0 + 4a_2a_0 - a_1^2$.

Justificar todas as respostas.

Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (4 pontos) Determine as correspondências de Galois para $M/\mathbb{Q}$ onde M é corpo de decomposição de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$ nos seguintes casos.
   (a) (1 ponto) $f(X) = X^3 + X^2 - n^2X - n^2$. [Redutível]
   (b) (1.5 ponto) $f(X) = X^4 - nX^2$. [Redutível]
   (c) (1.5 ponto) $f(X) = (X - n)(X^5 - 4X)$.

2. (3 pontos) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de $f(X) = X^3 - 7X + 7$.
   (a) (1 ponto) Mostre que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ é uma extensão de Galois.
   (b) (1 ponto) Seja $G = \mathscr{G}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \{g_1, g_2, g_3\}$. Calcule
   $$N(\alpha) = g_1(\alpha) \cdot g_2(\alpha) \cdot g_3(\alpha).$$
   [Dica: avalie $(X - g_1(\alpha)) \cdot (X - g_2(\alpha)) \cdot (X - g_3(\alpha))$ em $X = 0$.]
   (c) (1 ponto) Calcule $g_1(\alpha) + g_2(\alpha) + g_3(\alpha)$.

3. (2 pontos) Seja m um inteiro positivo impar e sejam
   $$f(X) = X^4 + mX + m, \qquad R(X) = X^3 - 4mX - m^2.$$
   O polinômio $f(X)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$ (sendo a sua redução módulo 2 irredutível em $\mathbb{F}_2[X]$) e $R(X)$ é a sua resolvente cúbica. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de $f(X)$. Seja M um corpo de decomposição de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$ e seja $G := \mathscr{G}(M/\mathbb{Q})$ o grupo de Galois de $M/\mathbb{Q}$.
   (a) (1 ponto) Mostre que se $m = 5$ a extensão $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ é de Galois.
   [Procure uma fatoração $f(X) = (X^2 + \sqrt{5}X + r)(X^2 - \sqrt{5}X + s)$.]
   (b) (1 ponto) Se $m = 7$, $R(X)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$. Neste caso, a extensão $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ é de Galois?

4. (1 ponto) Seja M um corpo de decomposição sobre $\mathbb{Q}$ do polinômio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$, irredutível em $\mathbb{Q}[X]$. Seja n o grau de $f(X)$ e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as raízes de $f(X)$ em M. Diga se a seguinte frase é sempre verdadeira: "se $\mathbb{Q}(\alpha_1), \ldots, \mathbb{Q}(\alpha_n)$ são dois a dois distintos então $|M : \mathbb{Q}| = n!$".
   [Dica: considere os subgrupos correspondentes $\mathbb{Q}(\alpha_i)'$.]

---

[1] Por *exemplo*, se o seu número de matrícula é 210123456 então $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$ (mas esse é *apenas um exemplo*!!).