Prova escrita – Álgebra Comutativa – Semestre 2021-2 – 30/03/2022

Escreva nome e matrícula em todas as folhas.

Justifique todas as respostas. Pode resolver os itens na ordem que preferir.

Todos os aneis considerados são comutativos e unitários.

1. (2 pontos) Fatore os ideais principais (3), (7), (10) de R como produtos de ideais primos de R nos seguintes domínios de Dedekind.
$$R = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}], \qquad R = \mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2].$$
2. (1 ponto) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ é um corpo.
3. (2 pontos) Sejam I, J dois ideais de R. $\sqrt{I}$ é o conjunto dos elementos $r \in R$ tais que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n \in I$. I é dito radical se $\sqrt{I} = I$.
   (a) Mostre que $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.
   (b) Mostre que se I, J são radicais e $I + J = R$ então IJ é radical.
4. (2 pontos) Sejam K um corpo, $R := K[X, Y]$ e sejam
$$I = (X, Y)^2 = (X^2, Y^2, XY), \qquad J = (X^2, Y^2) \subset I,$$
   ideais de R.
   (a) (0,5 ponto) Mostre que I é primário. [Dica. Calcule $\sqrt{I}$.]
   (b) (0,5 ponto) Mostre que I não é irredutível. [Dica. Considere (X^2, Y).]
   (c) (1 ponto) Mostre que J é irredutível. [Dica. Mostre que se H é um ideal de R contendo J propriamente então $XY \in H$.]

   Lembre-se que um ideal próprio I de R é dito
   - primário se $r, s \in R$, $rs \in I$ implicam $r \in I$ ou $s^n \in I$ para um $n \in \mathbb{N}$,
   - irredutível se $J_1, J_2 \trianglelefteq R$, $J_1 \cap J_2 = I$ implicam $I = J_1$ ou $I = J_2$.
5. (1 ponto) Seja I o ideal principal de $\mathbb{C}[X, Y]$ gerado por $Y - X^2$. Mostre que os ideais maximais de $R = \mathbb{C}[X, Y]/I$ são todos do tipo seguinte: $(X - a, Y - a^2)/I$ com $a \in \mathbb{C}$.
6. (1 ponto) Sejam A, B duas $\mathbb{C}$-álgebras finitamente geradas e seja $f : A \to B$ um morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Mostre que se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de B então a preimagem $f^{\leftarrow}(\mathfrak{m})$ é um ideal maximal de A.

   [Use o lema de Zariski]
7. (1 ponto) Seja R um anel e seja $N(R) := \sqrt{(0)}$, o ideal dos elementos nilpotentes. Suponha que $N(R_{\mathfrak{p}}) = \{0\}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Mostre que $N(R) = \{0\}$.

   Aqui $R_{\mathfrak{p}}$ é o localizado $S^{-1}R$ onde $S = R - \mathfrak{p}$.

   [Se ajudar, considere $I := \{x \in R \ : \ xr = 0\} \trianglelefteq R$.]