Prova escrita – Álgebra Comutativa – Semestre 2021-2 – 30/03/2022

Escreva nome e matrícula em todas as folhas.

Justifique todas as respostas. Pode resolver os itens na ordem que preferir.

Todos os aneis considerados são comutativos e unitários.

1. (2 pontos) Fatore os ideais principais (3), (7), (10) de R como produtos de ideais primos de R nos seguintes domínios de Dedekind.
$$R = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}], \qquad R = \mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2].$$
2. (1 ponto) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ é um corpo.
3. (2 pontos) Sejam I, J dois ideais de R. $\sqrt{I}$ é o conjunto dos elementos $r \in R$ tais que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n \in I$. I é dito radical se $\sqrt{I} = I$.
   (a) Mostre que $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$.
   (b) Mostre que se I, J são radicais e $I + J = R$ então IJ é radical.
4. (2 pontos) Sejam K um corpo, $R := K[X, Y]$ e sejam
$$I = (X, Y)^2 = (X^2, Y^2, XY), \qquad J = (X^2, Y^2) \subset I,$$
   ideais de R.
   (a) (0,5 ponto) Mostre que I é primário. [Dica. Calcule $\sqrt{I}$.]
   (b) (0,5 ponto) Mostre que I não é irredutível. [Dica. Considere (X^2, Y).]
   (c) (1 ponto) Mostre que J é irredutível. [Dica. Mostre que se H é um ideal de R contendo J propriamente então $XY \in H$.]

   Lembre-se que um ideal próprio I de R é dito
   - primário se $r, s \in R$, $rs \in I$ implicam $r \in I$ ou $s^n \in I$ para um $n \in \mathbb{N}$,
   - irredutível se $J_1, J_2 \trianglelefteq R$, $J_1 \cap J_2 = I$ implicam $I = J_1$ ou $I = J_2$.
5. (1 ponto) Seja I o ideal principal de $\mathbb{C}[X, Y]$ gerado por $Y - X^2$. Mostre que os ideais maximais de $R = \mathbb{C}[X, Y]/I$ são todos do tipo seguinte: $(X - a, Y - a^2)/I$ com $a \in \mathbb{C}$.
6. (1 ponto) Sejam A, B duas $\mathbb{C}$-álgebras finitamente geradas e seja $f : A \to B$ um morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Mostre que se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de B então a preimagem $f^{\leftarrow}(\mathfrak{m})$ é um ideal maximal de A.

   [Use o lema de Zariski]
7. (1 ponto) Seja R um anel e seja $N(R) := \sqrt{(0)}$, o ideal dos elementos nilpotentes. Suponha que $N(R_{\mathfrak{p}}) = \{0\}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Mostre que $N(R) = \{0\}$.

   Aqui $R_{\mathfrak{p}}$ é o localizado $S^{-1}R$ onde $S = R - \mathfrak{p}$.

   [Se ajudar, considere $I := \{x \in R \ : \ xr = 0\} \trianglelefteq R$.]

Prova escrita – Álgebra Comutativa – Semestre 2021-2 – **Resolução.**

1. (2 pontos) Fatore os ideais principais (3), (7), (10) de R nos seguintes domínios de Dedekind.

$$R = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}], \qquad R = \mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2].$$

Considere $f(X) = X^2 + 2$, $h(X) = X^2 - X + 1$. $\alpha = i\sqrt{2}$, $\alpha^2 = -2$. $\beta = (1+i\sqrt{3})/2$, $\beta^2 = \beta - 1$.

$f(X) = (X-1)(X-2) \bmod 3$, logo $(3) = (3, \alpha - 1)(3, \alpha - 2)$ no primeiro caso. $(\alpha-1)(\alpha-2) = -3\alpha \in (3)$, $3 = 3(\alpha-1) - 3(\alpha-2)$.

$h(X) = (X-2)^2 \bmod 3$, logo $(3) = (3, \beta-2)^2$ no segundo caso. $(\beta-2)^2 = \beta - 1 - 4\beta + 4 = 3(1-\beta)$, $3 = -3(\beta-2) - 3(1-\beta)$.

$f(X)$ é irredutível módulo 7, logo (7) é primo no primeiro caso.

$h(X) = (X-3)(X-5) \bmod 7$, logo $(7) = (7, \beta-3)(7, \beta-5)$ no segundo caso. $(\beta-3)(\beta-5) = \beta - 1 - 8\beta + 15 = 7(-\beta+2)$. $7 = -7(\beta-3) - 7(-\beta+2)$.

$f(X) = X^2 \bmod 2$ e $f(X)$ é irredutível mod 5, logo $(10) = (2)(5) = (2, \alpha)^2(5)$ no primeiro caso. $-\alpha^2 = 2$.

$h(X)$ é irredutível mod 2 e $h(X)$ é irredutível mod 5, logo $(10) = (2)(5)$ no segundo caso.

2. (1 ponto) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ é um corpo.

Vimos nas aulas que se $I \trianglelefteq R[X]$ e S é uma R-álgebra então

$$S \otimes_R R[X]/I \cong S[X]/S[X]I.$$

Como $\mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$, segue que

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]/(X^2+1),$$

que é um corpo porque X^2+1 é irredutível em $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$, de fato as duas raízes de X^2+1 são i e $-i$, que não pertencem a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$. Se K é um corpo, um polinômio de grau 2 é redutível em $K[X]$ se e somente se as duas raízes dele pertencem a K.

3. (2 pontos) Sejam I, J dois ideais de R. $\sqrt{I}$ é o conjunto dos elementos $r \in R$ tais que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n \in I$. I é dito radical se $\sqrt{I} = I$.

   (a) Mostre que $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$. A inclusão $\subseteq$ é óbvia pois $I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$, sendo $I \subseteq \sqrt{I}$ e $J \subseteq \sqrt{J}$. Mostraremos a outra inclusão. Se $r \in R$ é tal que $r^n \in \sqrt{I} + \sqrt{J}$ então existem $s, t \in R$ tais que $r^n = s + t$, $s^m \in I$ e $t^k \in J$. Segue que $r^{n(m+k)} = (s+t)^{m+k} \in I + J$ logo $r \in \sqrt{I+J}$.

   (b) Mostre que se I e J são radicais e $I + J = R$ então IJ é radical. Se $r \in R$ é tal que $r^n \in IJ$ então $r^n \in I \cap J$, logo $r \in I \cap J$ pois I e J são radicais. Sendo $I + J = R$ temos que $IJ = I \cap J$, logo $r \in IJ$.

4. (2 pontos) Sejam K um corpo, $R := K[X,Y]$ e sejam

$$I = (X,Y)^2 = (X^2, Y^2, XY), \qquad J = (X^2, Y^2) \subset I,$$

ideais de R.

(a) (0,5 ponto) Mostre que I é primário. [Dica. Calcule $\sqrt{I}$.] Temos $\sqrt{I} = (X,Y)$ que é maximal, logo I é primário.

(b) (0,5 ponto) Mostre que I não é irredutível. [Dica. Considere (X^2,Y).] Temos $I = (X^2,Y) \cap (X,Y^2)$. A inclusão $\subseteq$ é óbvia pois $X^2, Y^2, XY \in (X^2,Y) \cap (X,Y^2)$. Para mostrar a outra inclusão escreva um elemento γ de $(X^2,Y) \cap (X,Y^2)$ como

$$\gamma = X^2 f_1 + XY f_2 + Y f_3 = X h_1 + XY h_2 + Y^2 h_3$$

com $f_2 = f_2(Y)$, $h_2 = h_2(X)$, $f_3 = f_3(Y)$, $h_1 = h_1(X)$. Substituindo $X = 0$ obtemos $Y f_3(Y) = Y^2 h_3(0,Y)$, logo $f_3 \in (Y)$ e isso implica que $\gamma \in (X^2, Y^2, XY) = I$.

(c) (1 ponto) Mostre que J é irredutível. [Dica. Mostre que se H é um ideal de R contendo J propriamente então $XY \in H$.] Seguindo a dica, seja $f(X,Y) \in H - J$, assim podemos isolar X^2 e Y^2 e escrever $f(X,Y) = X^2 f_1 + Y^2 f_2 + XY f_3$. Segue que f_3 é um polinômio constante e não nulo, logo $XY = (f - X^2 f_1 - Y^2 f_2)/f_3 \in H$ sendo $f, X^2, Y^2 \in H$. Isso implica que todo ideal de R contendo J propriamente precisa conter XY, logo uma interseção de dois ideais de R contendo J propriamente não pode ser igual a J, pois $XY \notin J$. Em outras palavras J é irredutível.

5. (1 ponto) Seja I o ideal principal de $\mathbb{C}[X,Y]$ gerado por $Y - X^2$. Mostre que os ideais maximais de $R = \mathbb{C}[X,Y]/I$ são todos do tipo seguinte: $(X - a, Y - a^2)/I$ com $a \in \mathbb{C}$.

Como $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, os ideais maximais de $\mathbb{C}[X,Y]$ são do tipo $(X-a, Y-b)$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Segue que os ideais maximais de R são do tipo $(X-a, Y-b)/I$ com $(X-a, Y-b)$ contendo I. Sendo $(Y - X^2) = I \subseteq (X-a, Y-b)$, podemos escrever $Y - X^2 = (X-a) f(X,Y) + (Y-b) h(X,Y)$, assim $b - a^2 = 0$ logo todo ideal de R é do tipo $(X-a, Y-a^2)/I$. Por outro lado, se $a \in \mathbb{C}$ então $I = (Y - X^2) \subseteq (X - a, Y - a^2)$, de fato

$$Y - X^2 = Y - a^2 - (X^2 - a^2) = Y - a^2 - (X-a)(X+a) \in (X-a, Y-a^2).$$

6. (1 ponto) Sejam A, B duas $\mathbb{C}$-álgebras finitamente geradas e seja $f : A \to B$ um morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Mostre que se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de B então a preimagem $f^{\leftarrow}(\mathfrak{m})$ é um ideal maximal de A. [Use o lema de Zariski]

Seja $\mathfrak{p} = f^{\leftarrow}(\mathfrak{m})$. Temos um morfismo induzido $\mathbb{C} \to A \to A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{m}$. O corpo $B/\mathfrak{m}$ é finitamente gerado como $\mathbb{C}$-algebra (pois B é finitamente gerado como $\mathbb{C}$-álgebra), logo é finitamente gerado como $\mathbb{C}$-módulo pelo lema de Zariski, ou seja é uma extensão finita de $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, segue que o morfismo canônico $\mathbb{C} \to B/\mathfrak{m}$ é um isomorfismo. Em particular $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{m}$ é sobrejetiva (pois se uma composição $f_1 \circ f_2$ é sobrejetiva, então f_1 é sobrejetiva), logo $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{m}$ é um isomorfismo, em particular $A/\mathfrak{p}$ é um corpo, ou seja $\mathfrak{p}$ é maximal em A.

7. (1 ponto) Seja R um anel e seja $N(R) := \sqrt{(0)}$, o ideal dos elementos nilpotentes. Suponha que $N(R_\mathfrak{p}) = \{0\}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Mostre que $N(R) = \{0\}$.

   Aqui $R_\mathfrak{p}$ é o localizado $S^{-1}R$ onde $S = R - \mathfrak{p}$.

   Seja $r \in N(R)$, ou seja $r \in R$ e $r^n = 0$ para algum inteiro positivo n. Queremos mostrar que $r = 0$. Observe que no localizado $R_\mathfrak{p}$ temos $0/1 = r^n/1 = (r/1)^n$ logo $r/1 \in N(R_\mathfrak{p}) = \{0\}$, ou seja $r/1 = 0/1$ em $R_\mathfrak{p}$. Isso significa que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R existe $s \in R - \mathfrak{p}$ tal que $sr = 0$. Isso implica que o ideal

   $$I := \{x \in R \ : \ xr = 0\} \trianglelefteq R$$

   não está contido em nenhum ideal primo de R, logo não está contido em nenhum ideal maximal de R (pois todo ideal maximal é primo). Como todo ideal próprio de R está contido em um ideal maximal, deduzimos que $I = R$, ou seja $1 \in I$, ou seja $r = 0$.