Lista facultativa - Exercícios difíceis

O **grupo diedral** de grau n é o grupo

$$G = \langle x, b \rangle = \{1, x, \dots, x^{n-1}, b, xb, \dots, x^{n-1}b\} \leq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

onde

$$x = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A tabela de multiplicação pode ser deduzida dos fatos seguintes, e é bom usá-los para evitar de multiplicar matrizes:

$$o(x) = n \qquad o(b) = 2, \qquad bxbx = 1.$$

A terceira condição pode ser escrita de forma equivalente como $bxb = x^{-1}$ ou também como $bxb^{-1} = x^{-1}$ (sendo $b^{-1} = b$). Assim por exemplo

$$x^2bx^3bx^2b = x^2(bxb)^3x^2b = x^2x^{-3}x^2b = xb.$$

O grupo diedral de grau n é indicado com D_{2n} e é finito de ordem $2n$. O subgrupo $N = \langle x \rangle$, de ordem n, tem índice 2 em $G = D_{2n}$, logo $N \trianglelefteq G$ e definido $H = \langle b \rangle$ temos $|N| = n$, $|H| = 2$, $N \cap H = \{1\}$ e $NH = G$. Em particular todo elemento de G pode ser escrito de maneira única como x^ib^j onde $i \in \{0, \dots, n-1\}$ e $j \in \{0, 1\}$.

(1) Mostre que D_{2n} é abeliano se e somente se $n \leq 2$.
(2) Mostre que todo elemento de $D_{2n} - \langle x \rangle$ tem ordem 2.
(3) Mostre que se $n > 2$ então $\langle x \rangle$ é o único subgrupo normal cíclico de D_{2n} de índice 2.
(4) Seja G um grupo finito, sejam $x, y \in G$ de ordem 2 e suponha $G = \langle x, y \rangle$. Mostre que G é um grupo diedral.
(5) Calcule o número de 2-subgrupos de Sylow de D_{2n}.
(6) Calcule o centro de D_{2n}.
(7) Calcule a equação das classes de D_{2n}.
(8) Mostre que $D_{4n} \cong D_{2n} \times C_2$ se e somente se n é ímpar.
(9) Seja $N \trianglelefteq G = D_{2n}$ tal que $|G : N| > 2$. Mostre que $N \leq \langle x \rangle$.
(10) Mostre que D_{2n} é isomorfo a um subgrupo de S_n.