Lista facultativa - Exercícios difíceis

O **grupo diedral** de grau n é o grupo

$$G = \langle x, b\rangle = \{1, x, \dots, x^{n-1}, b, xb, \dots, x^{n-1}b\} \leq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

onde

$$x = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A tabela de multiplicação pode ser deduzida dos fatos seguintes, e é bom usá-los para evitar de multiplicar matrizes:

$$o(x) = n \qquad o(b) = 2, \qquad bxbx = 1.$$

A terceira condição pode ser escrita de forma equivalente como $bxb = x^{-1}$ ou também como $bxb^{-1} = x^{-1}$ (sendo $b^{-1} = b$). Assim por exemplo

$$x^2bx^3bx^2b = x^2(bxb)^3x^2b = x^2x^{-3}x^2b = xb.$$

O grupo diedral de grau n é indicado com D_{2n} e é finito de ordem $2n$. O subgrupo $N = \langle x\rangle$, de ordem n, tem índice 2 em $G = D_{2n}$, logo $N \trianglelefteq G$ e definido $H = \langle b\rangle$ temos $|N| = n$, $|H| = 2$, $N \cap H = \{1\}$ e $NH = G$. Em particular todo elemento de G pode ser escrito de maneira única como x^ib^j onde $i \in \{0, \dots, n-1\}$ e $j \in \{0, 1\}$.

(1) Mostre que D_{2n} é abeliano se e somente se $n \leq 2$.

Se $G = D_{2n}$ é abeliano então $x = bxb^{-1} = x^{-1}$ logo $x^2 = 1$ ou seja $n \leq 2$. Vice-versa se $n \leq 2$ então $x^2 = 1$ ou seja $x = x^{-1}$, segue que $x = x^{-1} = bxb^{-1}$ ou seja os dois geradores de G comutam, logo G é abeliano.

(2) Mostre que todo elemento de $D_{2n} - \langle x\rangle$ tem ordem 2.

Seja $G = D_{2n}$. Um elemento de $G - \langle x\rangle$ tem a forma x^ib com $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Obviamente $x^ib \neq 1$ sendo $x^ib \notin \langle x\rangle$. Temos $(x^ib)^2 = x^ibx^ib = x^i(bxb^{-1})^i = x^ix^{-i} = 1$ logo x^ib tem ordem 2.

(3) Mostre que se $n > 2$ então $\langle x\rangle$ é o único subgrupo normal cíclico de D_{2n} de índice 2.

Seja $N = \langle x\rangle$. Obviamente $G = N \cup Nb$ logo N é um subgrupo normal cíclico de $G = D_{2n}$ de índice 2. Seja $L = \langle y\rangle$ um subgrupo normal cíclico de G de índice 2. Sendo $n > 2$ pelo item anterior $y \in \langle x\rangle$, pois se fosse $y \notin \langle x\rangle$ então y teria ordem 2 logo L não poderia ter índice 2, sendo $|G| > 4$. Segue que $L \leq N$, mas sendo $|L| = n = |N|$ segue $L = N$.

(4) Seja G um grupo finito, sejam $x, y \in G$ de ordem 2 e suponha $G = \langle x, y \rangle$. Mostre que G é um grupo diedral.

Seja $a = xy$ e seja n a ordem de a. Observe que

$$yay^{-1} = yxyy^{-1} = yx = y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} = a^{-1},$$

logo os elementos a e y jogam o papel de x e b na definição do grupo diedral. Em outras palavras as relações $o(a) = n$, $o(y) = 2$, $yay^{-1} = a^{-1}$ determinam a tabela de multiplicação de G, que então é a mesma de D_{2n}. Segue que $G \cong D_{2n}$.

(5) Calcule o número de 2-subgrupos de Sylow de D_{2n}.

Escrevamos $n = 2^k m$ com m ímpar, assim $|G| = 2^{k+1}m$ e a ordem de um 2-Sylow de G é 2^{k+1}. Considere $P := \langle x^m \rangle \langle b \rangle$, como $\langle x^m \rangle \trianglelefteq G$ e $\langle x^m \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$ temos que $P \leq G$ e $|P| = 2^{k+1}$, logo P é um 2-Sylow de G. $n_2(G)$ é igual ao índice do normalizador $N_G(P)$ em G, logo precisamos calcular $|N_G(P)|$. Seja $x^i b^j \in N_G(P)$, temos que $r_t = x^i b^j \cdot x^{mt} b \cdot b^{-j} x^{-i} \in P$ para todo inteiro $t = 1, \ldots, 2^k$. Mostraremos que $x^i b^j \in P$, provando assim que $N_G(P) = P$.

- Se $j = 0$ então $r_t = x^i x^{mt} b x^{-i} = x^{2i+mt} b \in P$ logo $2i + mt$ é um múltiplo de m, ou seja $2i$ é múltiplo de m, ou seja (sendo m ímpar) i é múltiplo de m, mas isso implica que $x^i b^j \in P$.
- Se $j = 1$ então $r_t = x^i b x^{mt} x^{-i} = x^{2i-mt} b \in P$ logo $2i - mt$ é múltiplo de m, e analogamente ao caso anterior isso implica que m divide i, logo $x^i b^j \in P$.

Isso mostra que $N_G(P) = P$ logo $n_2(G) = |G : N_G(P)| = |G : P| = m$.

(6) Calcule o centro de D_{2n}.

Vimos que se $n \leq 2$ então $G = D_{2n}$ é abeliano, logo $Z(G) = G$. Suponha $n > 2$. Os elementos da forma $x^i b$ com $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ não estão no centro porque se $x^i b$ comuta com x então $x^i b = x x^i b x^{-1} = x^{i+1} x b = x^{i+2} b$ logo $x^2 = 1$, um absurdo sendo $n > 2$. Segue que $Z(G) \leq \langle x \rangle$. Seja $x^i \in Z(G)$, segue que $x^i = b x^i b = x^{-i}$ ou seja $x^{2i} = 1$, ou seja n divide $2i$, e sendo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ isso só acontece para $i = 0$ se n é ímpar e para $i = 0, n/2$ se n é par. Segue que $Z(G) = \{1\}$ se n é ímpar e $Z(G) = \{1, x^{n/2}\}$ se n é par.

(7) Calcule a equação das classes de D_{2n}.

Primeiro vamos calcular os conjugados de b. Temos $x^i b^j b (x^i b^j)^{-1} = x^{2i} b$, isso mostra que se n é ímpar a classe de conjugação de b é exatamente $G - \langle x \rangle$, de tamanho n, e se n é par a classe de conjugação de b é exatamente $\{b, x^2 b, x^4 b, \ldots, x^{n-2} b\}$. Quando n é par temos $x^i x b x^{-i} =$

$x^{2i+1}b$ e $(x^ib)xb(x^ib)^{-1} = x^ix^{-1}x^ib = x^{2i-1}b$, segue que a classe de conjugação de xb é $\{xb, x^3b, \ldots, x^{n-1}b\}$. Segue que quando n é par $G - \langle x \rangle$ é união de duas classes de conjugação distintas, a classe de b e a classe de xb, as duas têm tamanho $n/2$.

Agora vamos considerar as classes de conjugação dos elementos da forma x^i. Se $i = 0$ então a classe de $x^0 = 1$ é $\{1\}$. Suponha $i > 0$. Temos $x^jbx^i(x^jb)^{-1} = x^jx^{-i}x^{-j} = x^{-i}$ logo os únicos conjugados de x^i são x^i e x^{-i}, e são distintos se e somente se n não divide $2i$. Por outro lado n divide $2i$ se e somente se $i = 0$ quando n é ímpar e $i \in \{0, n/2\}$ quando n é par, logo se $i > 0$ então a classe de conjugação de x^i é $\{x^i, x^{-i}\}$ de tamanho 2 quando $i \neq n/2$ (no caso n par), e é $\{x^i\}$, de tamanho 1, quando n é par e $i = n/2$. Segue que quando n é ímpar $\langle x \rangle$ contem $1+(n-1)/2$ classes de conjugação, uma de tamanho 1 e as outras $(n-1)/2$ de tamanho 2, e quando n é par $\langle x \rangle$ contem $2+(n-2)/2$ classes de conjugação, duas de tamanho 1 e as outras $(n-2)/2$ de tamanho 2. Segue que quando n é ímpar a equação das classes é

$$|G| = 1 + 2 \cdot \frac{n-1}{2} + n,$$

e quando n é par a equação das classes é

$$|G| = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{n-2}{2} + n/2 + n/2.$$

(8) Mostre que $D_{4n} \cong D_{2n} \times C_2$ se e somente se n é ímpar.

Se n é par então pelo item 5 temos que $Z(D_{2n})$ é isomorfo a C_2, logo $Z(D_{2n} \times C_2) \cong C_2 \times C_2$, por outro lado $Z(D_{4n}) \cong C_2$ logo D_{4n} não é isomorfo a $D_{2n} \times C_2$. Agora suponha n ímpar, $G = D_{4n} = \langle x, b \rangle$. Considere os subgrupos $N = \langle x^2, b \rangle$, $H = \langle x^n \rangle$. Sendo $H = Z(G)$ temos $H \trianglelefteq G$ e $|H| = 2$, além disso $N \cap H = \{1\}$ pois nenhuma potência de x^2 é igual a x^n, sendo n ímpar e $o(x) = 2n$ par. É claro que N é um grupo diedral de ordem $2n$, pois verifica a sua tabela de multiplicação com os geradores x^2 e b. Segue que $|NH| = |N||H|/|N \cap H| = |N||H| = 2n \cdot 2 = 4n = |G|$ logo $HN = G$. Segue que N e H são normais em G, $H \cap N = \{1\}$ e $HN = G$ logo $G \cong N \times H$.

(9) Seja $N \trianglelefteq G = D_{2n}$ tal que $|G : N| > 2$. Mostre que $N \leq \langle x \rangle$.

Vamos mostrar a contrapositiva. Se N não está contido em $\langle x \rangle$ então existe $x^ib \in N$, e sendo N normal em G temos $N \ni xx^ibx^{-1} = x^{i+2}b$, logo $(x^{i+2}b)(x^ib)^{-1} = x^2 \in N$, logo $\langle x^2 \rangle \leq N$, se trata de pelo menos $n/2$ elementos em $N \cap \langle x \rangle$ ($n/2$ elementos se n é par, n elementos se n é ímpar). Segue que $(x^2)^jx^ib = x^{i+2j}b \in N$ para todo inteiro j, se trata de pelo menos $n/2$ elementos em $N - \langle x \rangle$ ($n/2$ elementos se n é par, n elementos se n é ímpar). Segue que N contem pelo menos

$n/2$ elementos em $\langle x \rangle$ e pelo menos $n/2$ elementos em $N - \langle x \rangle$, logo $|N| \geq n/2 + n/2 = n$, segue que $|G : N| = 2n/|N| \leq 2n/n = 2$.

(10) Mostre que D_{2n} é isomorfo a um subgrupo de S_n.

Seja $H := \langle b \rangle$. Como $|G : H| = n$, o teorema de Cayley generalizado implica que G/H_G é isomorfo a um subgrupo de S_n, logo para concluir basta mostrar que $H_G = \{1\}$. Mas sendo $H = \langle b \rangle = \{1, b\}$, se $H_G \neq \{1\}$ então $H_G = H$, ou seja $H \trianglelefteq G$, logo basta mostrar que H não é normal em G. Se $n > 2$ isso é verdade pois $xbx^{-1} = xbx^{-1}bb = x^2 b \notin H$ sendo $x^2 \neq 1$. Se $n = 2$ então $G = \{1, x, b, xb\} \cong C_2 \times C_2$ é isomorfo ao grupo de Klein, que é um subgrupo de S_4, e se $n = 1$ então $G \cong C_2$ é isomorfo a S_2.