Lista facultativa - Exercícios difíceis

(1) **Seja p um primo e seja q um primo que divide $p-1$. Mostre que o grupo simétrico S_p contem um subgrupo de ordem pq.** [Dica: seja P um p-Sylow de S_p, mostre que $|N_G(P)| = p(p-1)$.]

(2) **Seja n um inteiro positivo. Suponha que todo grupo de ordem n é cíclico. Mostre que n e $\varphi(n)$ são coprimos** (a volta também vale mas é mais difícil). [Dica: lembre-se que se $n = \prod_i p_i^{a_i}$ então

$$\varphi(n) = \prod_i p_i^{a_i - 1}(p_i - 1).$$

Se n e $\varphi(n)$ não são coprimos tem dois casos: n é divisível por p^2 para algum primo p (neste caso considere $C_p \times C_p$) ou existem dois divisores primos p e q de n tais que q divide $p-1$, aplique o exercício acima.]

(3) **Sejam p um primo, G um p-grupo finito e H um subgrupo de G. Mostre que se $N_G(H) = H$ então $H = G$.**

(4) **Sejam p e q dois primos distintos, e seja G um grupo de ordem $p^m q$. Mostre que G é solúvel.** [Dica: basta mostrar que G não é simples (por quê?). Sejam P_1 e P_2 dois p-Sylow com $|P_1 \cap P_2|$ o máximo possível, mostre que $P_1 \cap P_2 = \{1\}$ supondo isso falso por contradição e mostrando que definidos $N_1 = N_{P_1}(P_1 \cap P_2)$ e $N_2 = N_{P_2}(P_1 \cap P_2)$ temos que $J = \langle N_1, N_2 \rangle$ (o subgrupo gerado por N_1 e N_2) não é um p-grupo (use o exercício anterior, que implica que $N_i \neq P_1 \cap P_2$ para $i = 1, 2$).]

(5) **Sejam $p < q < r$ três primos e seja G um grupo de ordem pqr. Mostre que** $n_r(G) = 1$. [Dica: suponha $n_r \neq 1$ por contradição, mostre que $n_r = pq$, mostre que $n_q = 1$ (mostre que se $n_q \neq 1$ então $n_q \geq r$, e conte os elementos), dado um q-Sylow Q e um r-Sylow R mostre que $RQ/Q \trianglelefteq G/Q$, deduza que RQ contem todos os r-Sylow de G.]

(6) **Mostre que S_5 contem exatamente 5 subgrupos de indice 5.**

(7) **Encontre todos os grupos com exatamente 3 classes de conjugação.**

(8) **Encontre todos os grupos com exatamente 4 classes de conjugação.**