Prova 1 - TGF1 - 07/12/2022

Nome e matrícula: ....

Resolva 7 **dos seguintes** 11 **itens.** Cada item vale 1 ponto.

Quando terminar, deverá ficar muito claro quais são os 7 itens a serem avaliados.

(1) Seja G um grupo nilpotente finito e seja A um subgrupo normal abeliano maximal, ou seja A é um elemento maximal no conjunto dos subgrupos normais abelianos de G. Mostre que $C_G(A) = A$. [Seja $C = C_G(A)$. Supondo $C \neq A$, considere $C/A \cap Z(G/A)$.]

(2) Seja G um grupo finito cujos subgrupos próprios são todos cíclicos. Mostre que os fatores principais de G têm ordem prima.

(3) Seja $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} < S_4$ o grupo de Klein e considere o grupo

$$G = \{(x, y) \in S_4 \times S_4 \ : \ xK = yK\}.$$

(a) Calcule a ordem de G.
(b) Mostre que G é solúvel e não nilpotente.

(4) Calcule o comprimento derivado do grupo do item anterior.

(5) Seja G um grupo finito e seja P um subgrupo de Sylow de G. Mostre que se P é subnormal em G então P é normal em G.

(6) Seja G um grupo não solúvel tal que os subgrupos próprios de G são todos solúveis. Seja N um subgrupo normal de G tal que $N \neq G$ e seja M um subgrupo maximal de G. Mostre que $N \leqslant M$.

(7) Caracterize os inteiros positivos n tais que todo grupo finito de expoente n é abeliano.

(8) Seja G um grupo de ordem 12 e suponha que $Z(G) = \{1\}$. Mostre que $G \cong A_4$. [No caso em que P, Q são subgrupos de Sylow com $Q \trianglelefteq G$, considere a ação de conjugação $P \to \mathrm{Aut}(Q)$.]

(9) Seja G um grupo e seja M um subgrupo maximal de G. Mostre que M contém pelo menos um entre G' (o subgrupo derivado) e $Z(G)$ (o centro).

(10) Sejam G um grupo finito, N um subgrupo normal de G, p um divisor primo de $|G|$ tais que p não divide $|N|$ e suponha que $|G : N|$ é uma potência de p. Mostre que N é característico em G. [Tome $g \in G$ de ordem não divisível por p e mostre que $g \in N$.]

(11) Seja G um grupo finito e suponha que dois quaisquer elementos de ordens coprimas comutam. Mostre que G é nilpotente.