Prova 1 - TGF1 - 07/12/2022 - Resolução.

(1) Seja G um grupo nilpotente finito e seja A um subgrupo normal abeliano maximal, ou seja A é um elemento maximal no conjunto dos subgrupos normais abelianos de G. Mostre que $C_G(A) = A$. [Seja $C = C_G(A)$. Supondo $C \neq A$, considere $C/A \cap Z(G/A)$.]

Seja $C := C_G(A)$. Note que C é exatamente o núcleo do homomorfismo canônico $G \to \mathrm{Aut}(A)$, logo $C \trianglelefteq G$. Como A é abeliano, $A \leqslant C$. Suponha $C \neq A$ por contradição. Como G/A é nilpotente, C/A tem interseção não trivial com o centro de G/A, logo existe um elemento não trivial $zA \in C/A \cap Z(G/A)$. Segue que $B = \langle z \rangle A$ é abeliano (pois $z \in C$) e normal em G (sendo $B/A \leqslant Z(G/A)$), além disso $A < B$ sendo $z \notin A$. Isso contradiz a maximalidade de A.

(2) Seja G um grupo finito cujos subgrupos próprios são todos cíclicos. Mostre que os fatores principais de G têm ordem prima.

Observe que G é solúvel pois os seus subgrupos próprios são todos abelianos (vimos isso nas aulas teóricas). Seja H/K um fator principal de G, assim $K \trianglelefteq G$ e H/K é um subgrupo normal minimal de G/K. Se $H = G$ então G/K é normal minimal em si mesmo, logo é um grupo simples e solúvel, logo tem ordem prima. Se $H \neq G$ então H é cíclico, logo H/K é cíclico também. Mas H/K é abeliano elementar (os fatores principais de um grupo solúvel finito são abelianos elementares), logo $H/K \cong {C_p}^n$ para algum primo p. Como H/K é cíclico, $n = 1$, ou seja $H/K \cong C_p$.

(3) Seja $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} < S_4$ o grupo de Klein e considere o grupo

$$G = \{(x, y) \in S_4 \times S_4 \ : \ xK = yK\}.$$

(a) Calcule a ordem de G.
(b) Mostre que G é solúvel e não nilpotente.

Considere a projeção na primeira componente, $\pi : G \to S_4$. É sobrejetiva e o seu núcleo é $N = \{1\} \times K$, logo $G/N \cong S_4$ e isso implica que $|G|/4 = |G|/|N| = |G/N| = |S_4| = 24$, logo $|G| = 4 \cdot 24 = 96$. G é solúvel pois é um subgrupo de $S_4 \times S_4$, que é solúvel. G não é nilpotente pois $G/N \cong S_4$ e S_4 não é nilpotente sendo $Z(S_4) = \{1\}$.

(4) Calcule o comprimento derivado do grupo do item anterior.

Como $G \leqslant S_4 \times S_4$, temos $\mathrm{dl}(G) \leqslant \mathrm{dl}(S_4 \times S_4) = \mathrm{dl}(S_4) = 3$. Por outro lado, $G/N \cong S_4$, logo $\mathrm{dl}(G) \geqslant \mathrm{dl}(G/N) = \mathrm{dl}(S_4) = 3$, logo $\mathrm{dl}(G) = 3$.

(5) Seja G um grupo finito e seja P um subgrupo de Sylow de G. Mostre que se P é subnormal em G então P é normal em G.

Existe uma sequência $P = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = G$. Como P é normal em H_1, é característico em H_1 pelo teorema de Sylow, sendo o único subgrupo de H_1 de ordem $|P|$. Segue que $P \trianglelefteq_c H_1 \trianglelefteq H_2$ logo $P \trianglelefteq H_2$. O mesmo argumento aplicado a $P \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq H_3$ mostra que $P \trianglelefteq H_3$ e por indução $P \trianglelefteq H_i$ para todo i, logo $P \trianglelefteq G$.

(6) Seja G um grupo não solúvel tal que os subgrupos próprios de G são todos solúveis. Seja N um subgrupo normal de G tal que $N \neq G$ e seja M um subgrupo maximal de G. Mostre que $N \leqslant M$.

Observe que N e M são solúveis por hipótese. Se N não está contido em M então $NM = G$ logo $G/N = MN/N \cong M/M \cap N$ é solúvel, sendo um quociente do grupo solúvel M. Segue que N e G/N são solúveis, logo G é solúvel, uma contradição. Logo $N \leqslant M$.

(7) Caracterize os inteiros positivos n tais que todo grupo finito de expoente n é abeliano.

Se n é divisível por um primo ímpar p então vimos que o grupo U das matrizes unitriangulares superiores 3×3 sobre $\mathbb{F}_p$ é não abeliano de expoente p, logo $\exp(U \times C_n) = n$ e $U \times C_n$ é não abeliano. Se $n = 2^k$ com $k \geqslant 2$ então $D_8 \times C_n$ é não abeliano de expoente n, sendo $\exp(D_8) = 4$. Segue que se todo grupo de expoente n é abeliano então necessariamente $n \in \{1, 2\}$. Por outro lado, o único grupo de expoente 1 é o grupo trivial e todo grupo de expoente 2 é abeliano pois se $a, b \in G$ e $\exp(G) = 2$ então $a^2 = 1$, $b^2 = 1$, $(ab)^2 = 1$ logo $abab = 1$ e multiplicando a esquerda por a e a direita por b obtemos $ba = ab$. Segue que todo grupo finito de expoente n é abeliano se e somente se $n \in \{1, 2\}$.

(8) Seja G um grupo de ordem 12 e suponha que $Z(G) = \{1\}$. Mostre que $G \cong A_4$. [No caso em que P, Q são subgrupos de Sylow com $Q \trianglelefteq G$, considere a ação de conjugação $P \to \mathrm{Aut}(Q)$.]

Sejam P um 2-Sylow de G e Q um 3-Sylow de G. Se $n_3 \neq 1$ então $Q_G = \{1\}$ logo, sendo $|G : Q| = 4$, pelo teorema de Cayley generalizado G é isomorfo a um subgrupo de S_4, e segue que $G \cong A_4$. Se $n_3 = 1$ então $Q \trianglelefteq G$ logo P age por conjugação sobre Q e isso corresponde a um homomorfismo $f : P \to \mathrm{Aut}(Q) \cong C_2$. Como $|P| = 4$, o núcleo de f é não trivial, ou seja existe $1 \neq z \in \ker(f)$. Sendo $|P| = 4$, P é abeliano, logo $z \in Z(G)$, contradizendo o fato que $Z(G) = \{1\}$.

(9) Seja G um grupo e seja M um subgrupo maximal de G. Mostre que M contém pelo menos um entre G' (o subgrupo derivado) e $Z(G)$ (o centro).

Se M não contém $Z = Z(G)$ então $MZ = G$ logo M é normal em G. De fato M é normalizado por M e por Z, logo $G = MZ \leqslant N_G(M)$. O quociente $G/M = ZM/M \cong Z/M \cap Z$ é abeliano, sendo Z abeliano, logo $G' \leqslant M$.

(10) Sejam G um grupo finito, N um subgrupo normal de G, p um divisor primo de $|G|$ tais que p não divide $|N|$ e suponha que $|G : N|$ é uma potência de p. Mostre que N é característico em G. [Tome $g \in G$ de ordem não divisível por p e mostre que $g \in N$.]

Como p não divide $|N|$, todo elemento de N tem ordem não divisível por p. Seja agora $g \in G$ de ordem não divisível por p. Então $N\langle g \rangle$ é um subgrupo de G contendo N e de ordem não divisível por p. Como $|G : N| = |P|$ é uma potência de p, segue que $N\langle g \rangle = N$, ou seja $g \in N$. Isso mostra que N é igual ao conjunto dos elementos de G cuja ordem não é divisiível por p. Como todo automorfismo de G preserva a ordem dos elementos, segue que $N \trianglelefteq_c G$.

(11) Seja G um grupo finito e suponha que dois quaisquer elementos de ordens coprimas comutam. Mostre que G é nilpotente.

Se P, Q são subgrupos de Sylow de G associados a primos distintos, então $[P, Q] = \{1\}$ por hipótese. Isso implica que P é normalizado por todos os subgrupos de Sylow de G. A união U de todos os subgrupos de Sylow de G é um conjunto gerador de G, pois $H = \langle U \rangle$ tem ordem divisível pela ordem de todos os subgrupos de Sylow de G, logo $|H| = |G|$, logo $H = G$. Segue que P é normalizado por G, ou seja $P \trianglelefteq G$. Isso mostra que todo subgrupo de Sylow de G é normal em G, ou seja G é nilpotente.