Prova 2 - TGF1 - 16/01/2023

Nome e matrícula: ....

Resolva 7 dos seguintes 12 itens. Cada item vale 1 ponto.

Quando terminar, deverá ficar muito claro quais são os 7 itens a serem avaliados.

Nos seguintes itens, G é sempre um grupo finito, $\Phi(G)$ é o subgrupo de Frattini de G, $F(G)$ é o subgrupo de Fitting de G e $Z(G)$ é o centro de G.

(1) Sejam $A, B \trianglelefteq G$. Mostre que $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$.

(2) Construa G e $A, B \trianglelefteq G$ tais que $\Phi(A \cap B) \neq \Phi(A) \cap \Phi(B)$.

(3) Seja $z \in Z(G)$ tal que $z^4 = 1$. Mostre que $z^2 \in \Phi(G)$.

(4) Seja $n \geqslant 2$ um inteiro. Construa G de ordem n tal que $\Phi(G) = \{1\}$.

(5) Seja $K \triangleleft A_4$ o grupo de Klein. Determine o subgrupo de Fitting do grupo

$$U = \{(x, y) \in A_4 \times A_4 \ : \ xK = yK\} < A_4 \times A_4.$$

(6) Um subgrupo normal N de G é dito "normal maximal" se $N \neq G$ e não existe nenhum $K \trianglelefteq G$ tal que $N < K < G$, ou seja o quociente G/N é um grupo simples. Seja $\mathfrak{X}(G)$ a interseção dos subgrupos normais maximais de G se $G \neq \{1\}$, e defina $\mathfrak{X}(\{1\}) = \{1\}$. Mostre que, se $H \trianglelefteq G$, então $\mathfrak{X}(H) \leqslant \mathfrak{X}(G)$.

(7) Suponha que G é solúvel, não abeliano, e tal que $F(G) \cong C_6$. Calcule $|G|$.

(8) Seja p um número primo que divide a ordem de G. Mostre que G contém um p-subgrupo de Sylow normal se e somente se $G/\Phi(G)$ contém um p-subgrupo de Sylow normal.

(9) Seja $G := \langle x \rangle \rtimes \langle h \rangle$ onde x tem ordem 5, h tem ordem 4 e $h^{-1}xh = x^2$, assim $h^{-i}xh^i = x^{2^i}$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
   (a) Mostre que $\langle h \rangle \cap x^{-1}\langle h \rangle x = \{1\}$.
   (b) Mostre que existe $N \trianglelefteq G$ tal que $\Phi(G/N) \neq \Phi(G)N/N$.

(10) Suponha que 3 não divide $|Z(G)|$ e que $|G : Z(G)| = 45$.
   (a) Mostre que $G/Z(G)$ é abeliano.
   (b) Mostre que 5 divide $|Z(G)|$.

(11) Seja N um subgrupo normal nilpotente de G. Mostre que se os subgrupos de Sylow de G são todos cíclicos, então N é cíclico.

(12) Construa G solúvel tal que $\{1\} \neq \Phi(G) \neq F(G) \neq G$.