Prova 2 - TGF1 - 16/01/2023 - Resolução.

(1) Sejam $A, B \trianglelefteq G$. Mostre que $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$.

$F(A \cap B)$ é característico em $A \cap B$, que é normal em G, logo $F(A \cap B)$ é nilpotente e normal em G, logo é normal em A e em B, segue que $F(A \cap B) \leqslant F(A) \cap F(B)$. Por outro lado, $F(A) \cap F(B)$ é nilpotente e normal em A e em B, logo é normal em $A \cap B$ e segue que $F(A) \cap F(B) \leqslant F(A \cap B)$.

(2) Construa G e $A, B \trianglelefteq G$ tais que $\Phi(A \cap B) \neq \Phi(A) \cap \Phi(B)$.

Seja $G := C_4 \times C_2 = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $A = \langle (x, 1) \rangle$, $B = \langle (x, y) \rangle$. Temos $\Phi(A) = \Phi(B) = \langle (x^2, 1) \rangle = A \cap B$ mas $\Phi(A \cap B) = \{(1, 1)\}$. Outro exemplo é $G = Q_8$, $A = \langle i \rangle$, $B = \langle j \rangle$, $A \cap B = \langle -1 \rangle = \Phi(A) = \Phi(B)$ mas $\Phi(A \cap B) = \{1\}$.

(3) Seja $z \in Z(G)$ tal que $z^4 = 1$. Mostre que $z^2 \in \Phi(G)$.

Como $\langle z \rangle \trianglelefteq G$, temos $\langle z^2 \rangle = \Phi(\langle z \rangle) \leqslant \Phi(G)$.

(4) Seja $n \geqslant 2$ um inteiro. Construa G de ordem n tal que $\Phi(G) = \{1\}$.

Escrevendo $n = p_1 \dots p_k$ com os p_i primos não necessariamente distintos, o produto direto $G = \prod_{i=1}^{k} C_{p_i}$ satisfaz $\Phi(G) = \prod_{i=1}^{k} \Phi(C_{p_i}) = \{1\}$ pois $\Phi(C_{p_i}) = \{1\}$ para todo i.

(5) Seja $K \triangleleft A_4$ o grupo de Klein. Determine o subgrupo de Fitting do grupo

$$U = \{(x, y) \in A_4 \times A_4 \ : \ xK = yK\} < A_4 \times A_4.$$

Vamos mostrar que $F(U) = K \times K$. A inclusão $\geqslant$ é clara pois $K \times K$ é um subgrupo normal nilpotente de U (é abeliano). Considere as duas projeções canônicas $\pi_i : A_4 \times A_4 \to A_4$, $i = 1, 2$. Note que $F(U)^{\pi_i} \cong F(U)/\ker(\pi_i|_U)$ é normal nilpotente em $A_4 \cong U/\ker(\pi_i|_U)$, logo está contido em $F(A_4) = K$. Segue que $F(U) \leqslant K \times K$.

(6) Um subgrupo normal N de G é dito "normal maximal" se $N \neq G$ e não existe nenhum $K \trianglelefteq G$ tal que $N < K < G$, ou seja o quociente G/N é um grupo simples. Seja $\mathfrak{X}(G)$ a interseção dos subgrupos normais maximais de G se $G \neq \{1\}$, e defina $\mathfrak{X}(\{1\}) = \{1\}$. Mostre que, se $H \trianglelefteq G$, então $\mathfrak{X}(H) \leqslant \mathfrak{X}(G)$.

Seja $L := \mathfrak{X}(H)$. Se $L \nleqslant \mathfrak{X}(G)$ então existe N, normal maximal em G, que não contém L. Segue que $LN = G$ por maximalidade de N, logo $H = H \cap LN = L(H \cap N)$ e isso implica que L não está contido em $H \cap N$, mas isso contradiz a definição de L pois $H/H \cap N \cong HN/N = G/N$ é um grupo simples.

(7) Suponha que G é solúvel, não abeliano, e tal que $F(G) \cong C_6$. Calcule $|G|$.

Sejam $F := F(G)$, $C := C_G(F)$. Como F é abeliano, $F \leqslant C$. Pelo teorema de Bender $C \leqslant F$, logo $C = F$. Segue que o núcleo do homomorfismo canônico $G \to \mathrm{Aut}(F)$ é F, além disso $\mathrm{Aut}(F) \cong C_2$, logo G/F é isomorfo a um subgrupo de C_2. Como G é não abeliano, $G \neq F$, logo $G/F \cong C_2$ assim $|G| = 2|F| = 12$.

(8) Seja p um número primo que divide a ordem de G. Mostre que G contém um p-subgrupo de Sylow normal se e somente se $G/\Phi(G)$ contém um p-subgrupo de Sylow normal.

Seja $\Phi := \Phi(G)$. Lembre-se que p divide $|G : \Phi(G)|$ pelo corolário do teorema de Schur-Zassenhaus. Se P é um p-subgrupo de Sylow normal de G então $P\Phi/\Phi$ é um p-subgrupo de Sylow normal de G/Φ. Seja N/Φ um p-subgrupo de Sylow normal de G/Φ. Em particular $N \trianglelefteq G$ e N/Φ é nilpotente, logo N é nilpotente. Segue que, se P é um p-subgrupo de Sylow de N, então P é não trivial sendo $P\Phi/\Phi = N/\Phi$ e, como $P \trianglelefteq_c N \trianglelefteq G$, obtemos que $P \trianglelefteq G$. Como $|G : N| = |G/\Phi : N/\Phi|$ não é divisível por p, e $|G : P| = |G : N| \cdot |N : P|$, segue que P é um subgrupo de Sylow de G.

(9) Seja $G := \langle x \rangle \rtimes \langle h \rangle$ onde x tem ordem 5, h tem ordem 4 e $h^{-1}xh = x^2$, assim $h^{-i}xh^i = x^{2^i}$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
(a) Mostre que $\langle h \rangle \cap x^{-1}\langle h \rangle x = \{1\}$.
(b) Mostre que existe $N \trianglelefteq G$ tal que $\Phi(G/N) \neq \Phi(G)N/N$.

Item a. Temos

$$\begin{aligned}
&x^{-1}hx = x^{-1}hxh^{-1}h = x^{-1}h^{-3}xh^3h = x^{-1}x^{2^3}h = x^2h,\\
&x^{-1}h^2x = x^{-1}h^2xh^{-2}h^2 = x^{-1}h^{-2}xh^2h^2 = x^{-1}x^{2^2}h^2 = x^3h^2,\\
&x^{-1}h^3x = x^{-1}h^3xh^{-3}h^3 = x^{-1}h^{-1}xhh^3 = x^{-1}x^2h^3 = xh^3.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $x^{-1}\langle h \rangle x = \{1, x^2h, x^3h^2, xh^3\}$, logo $\langle h \rangle \cap x^{-1}\langle h \rangle x = \{1\}$.

Item b. Como $\langle h \rangle$ é um subgrupo maximal de G, tendo índice primo, segue que $\Phi(G) = \{1\}$. Seja $N := \langle x \rangle$, então $G/N \cong C_4$ logo $\Phi(G/N) \cong C_2$, por outro lado $\Phi(G) = \{1\}$ logo $\Phi(G)N/N = N/N$ é o grupo trivial. Segue que $\Phi(G/N) \neq \Phi(G)N/N$.

(10) Suponha que 3 não divide $|Z(G)|$ e que $|G : Z(G)| = 45$.
(a) Mostre que $G/Z(G)$ é abeliano.
(b) Mostre que 5 divide $|Z(G)|$.

Item a. Seja $Z := Z(G)$. O quociente $X = G/Z$ tem ordem 45, logo, pelo teorema de Sylow, X admite um único 3-Sylow, de ordem 9, e um único 5-Sylow, de ordem 5. Segue que X é um produto direto de dois grupos abelianos, logo X é abeliano.

Item b. Se 5 não divide $|Z|$ então $|Z|$ e $|G : Z| = 45$ são coprimos, logo pelo teorema de Schur-Zassenhaus existe um complemento H de Z em G, ou seja $HZ = G$ e $H \cap Z = \{1\}$. Como Z é o centro de G, temos $H \trianglelefteq G$ logo G é isomorfo ao produto direto $Z \times H$. Como $|H| = 45$, H é abeliano, logo G é abeliano e $Z = G$, contradizendo o fato que $|G : Z| = 45$.

(11) Seja N um subgrupo normal nilpotente de G. Mostre que se os subgrupos de Sylow de G são todos cíclicos, então N é cíclico.

Se P é um subgrupo de Sylow de N, ele está contido em um subgrupo de Sylow de G (pelo teorema de Sylow), logo P é cíclico (pois os subgrupos de Sylow de G são cíclicos). Como N é nilpotente, é o produto direto dos seus subgrupos de Sylow, e sendo eles todos cíclicos e de ordens duas a duas coprimas, N é cíclico.

(12) Construa G solúvel tal que $\{1\} \neq \Phi(G) \neq F(G) \neq G$.

Seja $G := C_4 \times S_3$, temos $\Phi(G) = \Phi(C_4) \times \Phi(S_3) \cong C_2$ e $F(G) = F(C_4) \times F(S_3) \cong C_2 \times A_3$. Segue que $\{1\} < \Phi(G) < F(G) < G$.