Prova 3 - TGF1 - 15/02/2023

Nome e matrícula: ....

Resolva 7 dos seguintes 12 itens. Cada item vale 1 ponto.

Quando terminar, deverá ficar muito claro quais são os 7 itens a serem avaliados.

G é sempre um grupo finito não trivial, G' é o subgrupo derivado de G, $\Phi(G)$ é o subgrupo de Frattini de G, $F(G)$ é o subgrupo de Fitting de G e $Z(G)$ é o centro de G. Lembre-se que G é dito *primitivo* se existe um subgrupo maximal M de G tal que $M_G = \bigcap_{g\in G} M^g = \{1\}$ e que G é dito *almost-simple* se existe um subgrupo normal simples N de G tal que $C_G(N) = \{1\}$. Um subgrupo H de G é dito *subgrupo de Hall* se $|H|$ e $|G : H|$ são coprimos, é dito *subgrupo de Carter* se H é nilpotente e $N_G(H) = H$.

G é dito *quasi-simple* se $G' = G$ e $G/Z(G)$ é um grupo simples.

(1) Mostre que, se $G = G'$, então $Z(G) \leqslant \Phi(G)$.

(2) Mostre que, se G é quasi-simple, então $G/Z(G)$ não é abeliano e $Z(G) = \Phi(G) = F(G)$.

(3) Seja $S = G'$. Mostre que, se S é quasi-simple, então $\Phi(S) = \Phi(G) \cap S$.

(4) Mostre que, se G é almost-simple, então $F(G) = \{1\}$.

(5) Mostre que, se G é primitivo e solúvel, então $F(G)$ é um subgrupo normal minimal de G. [Lembre-se que, se N é um subgrupo normal minimal de G, então $C_G(N) = N$.]

(6) Mostre que, se G é primitivo e supersolúvel, então G' é abeliano.

(7) Mostre que, se H é um subgrupo de Hall de G e $N \trianglelefteq G$, então HN/N é um subgrupo de Hall de G/N.

(8) Suponha que $G = N \rtimes P$ com N abeliano de ordem ímpar e $|P| = 2$. Mostre que $C_G(P)$ é um subgrupo de Carter de G.

(9) Seja S um grupo simples não abeliano, seja n um inteiro positivo e seja S^n a potência direta $S \times \ldots \times S$ (n vezes). Mostre que S^n é um grupo primitivo se e somente se $n \leqslant 2$.

(10) Calcule a ordem de $\Phi(\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_{17}))$.

(11) Mostre que $G := \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_3)$ tem elementos de ordem 26. [Considere o grupo cíclico $\mathbb{F}_{27}^*$, que age sobre $\mathbb{F}_{27}$ por multiplicação.]

(12) $G = S_4$ age sobre $\Omega = \{\{x, y\} \ : \ x, y \in \{1, 2, 3, 4\},\ x \neq y\}$ por meio da regra $\{x, y\}^g := \{x^g, y^g\}$. Essa ação é transitiva? É primitiva?