Prova 3 - TGF1 - 15/02/2023 - Resolução.

G é sempre um grupo finito não trivial.

G é dito *quasi-simple* se $G' = G$ e $G/Z(G)$ é um grupo simples.

(1) Se $G = G'$ então $Z(G) \leqslant \Phi(G)$.

Caso contrário, existe M maximal em G não contendo $Z = Z(G)$, logo $MZ = G$. Segue que $M \trianglelefteq G$ e $G/M = ZM/M \cong Z/Z \cap M$ é abeliano, logo $G = G' \leqslant M$, uma contradição.

(2) Se G é quasi-simple, mostre que $G/Z(G)$ não é abeliano e que $Z(G) = \Phi(G) = F(G)$.

Se $G/Z(G)$ é abeliano então $G' = G \leqslant Z(G)$ logo G é abeliano e $G = G' = \{1\}$, uma contradição. Segue que $G/Z(G)$ é um grupo simples não abeliano. Pelo item anterior $Z(G) \leqslant \Phi(G) \leqslant F(G)$. Falta mostrar que $F(G)/Z(G)$ é o grupo trivial. Caso contrário, $F(G)/Z(G)$ seria um subgrupo normal próprio não trivial de $G/Z(G)$ (próprio pois $F(G)$ é nilpotente e $G/Z(G)$ não é nilpotente), que é simples, uma contradição.

(3) Seja $S = G'$. Mostre que, se S é quasi-simple, então $\Phi(S) = \Phi(G) \cap S$.

Como $S \trianglelefteq G$, temos $\Phi(S) \leqslant \Phi(G)$, logo $\Phi(S) \leqslant \Phi(G) \cap S$. Pelo item anterior $\Phi(S) = Z(S)$, logo $S/\Phi(S)$ é simples não abeliano. Como $\frac{\Phi(G)\cap S}{\Phi(S)}$ é um subgrupo normal nilpotente de $S/\Phi(S)$, é trivial, ou seja $\Phi(G) \cap S = \Phi(S)$.

(4) Mostre que, se G é almost-simple, então $F(G) = \{1\}$.

Como G é almost-simple, existe N normal em G, e simples, tal que $C_G(N) = \{1\}$. Se $F(G) \neq \{1\}$ então $F(G)$ contém um subgrupo L que é normal minimal em G. Como $F(G)$ é nilpotente, L é abeliano, logo $L \neq N$. Segue que $L \cap N = \{1\}$ e sabemos que isso implica que $[L, N] = \{1\}$, ou seja $L \leqslant C_G(N) = \{1\}$, uma contradição.

(5) Mostre que, se G é primitivo e solúvel, então $F(G)$ é um subgrupo normal minimal de G. [Lembre-se que, se N é um subgrupo normal minimal de G, então $C_G(N) = N$.]

Como G é solúvel, $F = F(G) \neq \{1\}$. Seja N um subgrupo normal minimal de G, assim $N \leqslant F$. Como $Z(F) \trianglelefteq_c F$, temos que $Z(F)$ é um subgrupo normal de G e $N \cap Z(F) \neq \{1\}$ pois F é nilpotente e N é normal em F. Sendo N normal minimal em G, obtemos que $N \leqslant Z(F)$, logo $F \leqslant C_G(N) = N$. Segue que $N = F$.

(6) Mostre que, se G é primitivo e supersolúvel, então G' é abeliano.

Seja N um subgrupo normal minimal de G, assim $C_G(N) = N$. Como G é supersolúvel, N é cíclico de ordem prima p. Segue que $G/N = G/C_G(N)$ é isomorfo a um subgrupo de $\mathrm{Aut}(N) \cong C_{p-1}$ logo G/N é cíclico, em particular abeliano. Segue que $G' \leqslant N$, logo G' é abeliano.

(7) Se H é um subgrupo de Hall de G e $N \trianglelefteq G$ então HN/N é um subgrupo de Hall de G/N.

Sabemos que $|H|$ e $|G : H|$ são coprimos. Temos que $|G/N : HN/N| = |G : HN|$ divide $|G : H| = |G : HN| \cdot |HN : H|$ e $HN/N \cong H/H \cap N$

logo a sua ordem divide $|H|$. Segue que $|HN/N|$ e $|G/N : HN/N|$ são coprimos.

(8) Suponha que $G = N \rtimes P$ com N abeliano de ordem ímpar e $|P| = 2$. Mostre que $C_G(P)$ é um subgrupo de Carter de G.

Seja $C := C_G(P)$. Se $n \in N$ e $x \in P$, então o elemento $g = nx$ pertence a C se e somente se $n \in C$, pois se $y \in P$ então $nxy = ynx$ significa $ny = yn$ (usando $xy = yx$). Segue que $C = (C \cap N)P$. Como $[C \cap N, P] = \{1\}$ e $N \cap P = \{1\}$, segue que $C = (C \cap N) \times P$ é abeliano, logo é nilpotente. Seja $g \in N_G(C)$, assim $P^g \leqslant C^g = C$. Como C é abeliano e P é um subgrupo de Sylow de C, temos $P^g = P$, e sendo $|P| = 2$ obtemos $g \in C$. Logo $N_G(C) = C$.

(9) Seja S um grupo simples não abeliano, seja n um inteiro positivo e seja S^n a potência direta $S \times \ldots \times S$ (n vezes). Mostre que S^n é um grupo primitivo se e somente se $n \leqslant 2$.

S é primitivo pois se M é um qualquer subgrupo maximal de S então $M_S = \{1\}$ sendo $M_S \trianglelefteq S$, $M_S \leqslant M < S$ e S simples. Temos que $\Delta = \{(s, s) \ : \ s \in S\}$ é maximal em S^2 e a interseção dos seus conjugados é trivial pois os únicos normais minimais de S^2 são $S \times \{1\}$ e $\{1\} \times S$. Segue que S e S^2 são primitivos. S^n admite n subgrupos normais minimais e um grupo primitivo contém no máximo 2 subgrupos normais minimais, logo se S^n é primitivo então $n \leqslant 2$.

(10) Calcule a ordem de $\Phi(\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_{17}))$.

Sejam $G := \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_{17})$, $S := \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_{17})$ e $Z = Z(G)$, assim $Z(S) = S \cap Z$. Sabemos que $|S \cap Z| = |Z(S)| = (3, 17-1) = 1$ e que $|Z| = 17-1 = 16$, $|S| = |G|/(17-1) = |G|/16$, logo $SZ = G$ (sendo $|SZ| = |S||Z| = |G|$) e sendo $S, Z \trianglelefteq G$ com $S \cap Z = \{1\}$ obtemos que $G \cong S \times Z$, assim $\Phi(G) \cong \Phi(S) \times \Phi(Z) \cong \Phi(Z)$ (pois S é simples, sendo $S \cap Z = \{1\}$). Como $\Phi(Z) \leqslant \Phi(G)$ obtemos que $\Phi(G) = \Phi(Z)$ e, sendo Z um grupo cíclico de ordem 16, $\Phi(G)$ tem ordem 8.

(11) Mostre que $G := \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_3)$ tem elementos de ordem 26. [Considere o grupo cíclico $\mathbb{F}_{27}^*$, que age sobre $\mathbb{F}_{27}$ por multiplicação.]

O grupo $C = \mathbb{F}_{27}^* = \mathbb{F}_{27} - \{0\}$ é cíclico, seja x um gerador de C, assim x tem ordem 26. Observe que $V = \mathbb{F}_{27}$ é um espaço vetorial de dimensão 3 sobre $\mathbb{F}_3$, e $f_x : V \to V$, $v \mapsto vx$, é uma função $\mathbb{F}_3$-linear inversível (a sua inversa é $f_{x^{-1}}$) e de ordem 26. A matriz que representa f_x em uma base qualquer de V é um elemento de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_3)$ de ordem 26.

(12) $G = S_4$ age sobre $\Omega = \{\{x, y\} \ : \ x, y \in \{1, 2, 3, 4\}, \ x \neq y\}$ por meio da regra $\{x, y\}^g := \{x^g, y^g\}$. Essa ação é transitiva? É primitiva?

Observe que $|\Omega| = \binom{4}{2} = 6$. A ação é transitiva pois se $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ pertencem a Ω então sendo $x_i \neq y_i$ para $i = 1, 2$ podemos escrever $\{x_1, y_1, z_1, w_1\} = \{1, 2, 3, 4\} = \{x_2, y_2, z_2, w_2\}$ e definir $\sigma \in S_4$ por $x_1^\sigma = x_2$, $y_1^\sigma = y_2$, $z_1^\sigma = z_2$ e $w_1^\sigma = w_2$ obtendo $\{x_1, y_1\}^\sigma = \{x_2, y_2\}$. A ação não é primitiva pois o estabilizador de $\{1, 2\}$ é $\{1, (12), (34), (12)(34)\}$ logo não é um subgrupo maximal de S_4 (está propriamente contido em um 2-Sylow de S_4 que tem ordem 8). Uma outra maneira de mostrar isso é observar que $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ é um bloco de imprimitividade.