Prova 1 de Representação de grupos 1, semestre 2023-1.

29 de maio de 2023. Respostas não motivadas não serão consideradas.

A nota da prova será $\min\{10, P\}$ sendo P a soma dos pontos obtidos, $0 \leqslant P \leqslant 12$. O valor $\max\{10, P\} - 10$ será adicionado à nota obtida na P2. O corpo base é sempre $\mathbb{C}$.

(1) (1 ponto) Seja G um grupo abeliano finito, seja $g \in G$ diferente de 1 e sejam $\chi_1, \dots, \chi_k$ os caracteres irredutíveis de G. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g) = 0.$$

(2) (2 pontos) Seja $f : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x) := |\{g \in G \ : \ g^3 = x^3\}|.$$

Diga se f é um caractere de G nos dois casos $G = A_4$, $G = S_4$.
[Use as tabelas na próxima página.]

(3) (1 ponto) Seja χ o caractere permutacional de S_4 agindo da forma natural sobre $\{1, 2, 3, 4\}$. Decomponha o quadrado simétrico $S^2(\chi)$, que é o caractere definido pela fórmula

$$S^2(\chi)(g) = \frac{1}{2}\left(\chi(g)^2 + \chi(g^2)\right),$$

como soma de caracteres irredutíveis de S_4.
[Use a tabela na próxima página.]

(4) (1 ponto) Seja χ um caractere do grupo finito G e seja $H \leqslant G$. Considere $\chi|_H : H \to \mathbb{C}$, $h \mapsto \chi(h)$, é um caractere de H. Mostre que se $\chi|_H$ é um caractere irredutível de H então χ é um caractere irredutível de G. [Pense na representação associada.]

(5) (1 ponto) Seja G um grupo finito e seja $H \leqslant G$. Seja χ um caractere irredutível de G. Mostre que $[\chi|_H, \chi|_H] \leqslant |G : H|$.

(6) (3 pontos) Seja G um grupo finito com 9 classes de conjugação, cujos representantes são $x_1, \dots, x_9$. Seja c_i o número de conjugados de x_i para $i = 1, \dots, 9$. Suponha que G tem a tabela de caracteres da próxima página.
 (a) Determine $c_1, \dots, c_9$ e $|G|$.
 (b) Mostre que G' é cíclico e deduza que G tem um subgrupo normal de ordem 3.
 (c) Mostre que G admite três 2-subgrupos de Sylow e que eles são não abelianos.

(7) (3 pontos) Seja $G := C_3 \rtimes C_4$ onde $C_4 = \langle h \rangle$ age sobre $C_3 = \langle x \rangle$ pela regra $h^{-1}xh = x^h = x^{-1}$. Encontre representantes das classes de conjugação de G e construa a tabela de caracteres de G.
[Mostre que $h^2 \in Z(G)$ e que h, xh^2 e h^3 são dois a dois não conjugados em G, projetando módulo G'.]

	1	6	8	6	3
S_4	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1
f					
χ					
$S^2(\chi)$					

TABELA 1. S_4

	1	4	4	3
A_4	1	(123)	(132)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	$e^{i2\pi/3}$	$e^{i4\pi/3}$	1
χ_3	1	$e^{i4\pi/3}$	$e^{i2\pi/3}$	1
χ_4	3	0	0	-1
f				

TABELA 2. A_4

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
G	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1
χ_3	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
χ_4	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	2	-2	0	-1	0	1	1	-1
χ_6	2	2	2	0	-1	0	-1	-1	-1
χ_7	2	-2	0	0	2	0	0	0	-2
χ_8	2	-2	0	0	-1	0	$-i\sqrt{3}$	$i\sqrt{3}$	1
χ_9	2	-2	0	0	-1	0	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	1

TABELA 3. Grupo G do item 6