Prova escrita de Representação de grupos 1, semestre 2023-1.

Resolução.

(1) (1 ponto) Seja G um grupo abeliano finito, seja $g \in G$ diferente de 1 e sejam $\chi_1, \ldots, \chi_k$ os caracteres irredutíveis de G. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g) = 0.$$

Como G é abeliano, $k = |G|$. A ortogonalidade da coluna de g com a coluna de 1 na tabela de caracteres de G implica que $\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g) \cdot \overline{\chi_i(1)} = 0$, e o resultado segue do fato que $\chi_i(1) = 1$ para todo i, sendo G abeliano.

(2) (2 pontos) Sejam $G = A_4$ e $f : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x) := |\{g \in G \ : \ g^3 = x^3\}|.$$

Diga se f é um caractere de G nos dois casos $G = A_4$, $G = S_4$.

No caso de S_4, $f = 4\chi_1 + 3\chi_2 - 2\chi_3 + \chi_4 + \chi_5$.

No caso de A_4, $f = 7\chi_1 - 2\chi_2 - 2\chi_3 + 2\chi_4$.

Como aparecem coeficientes negativos, f não é um caractere em nenhum desses dois casos.

(3) (1 ponto) Seja χ o caractere permutacional de S_4 agindo da forma natural sobre $\{1, 2, 3, 4\}$. Decomponha o quadrado simétrico $S^2(\chi)$, que é o caractere definido pela fórmula

$$S^2(\chi)(g) = \frac{1}{2}\left(\chi(g)^2 + \chi(g^2)\right),$$

como soma de caracteres irredutíveis de S_4.

$S^2(\chi) = 2\chi_1 + \chi_3 + 2\chi_4$.

(4) (1 ponto) Seja χ um caractere do grupo finito G e seja $H \leqslant G$. Considere $\chi|_H : H \to \mathbb{C}$, $h \mapsto \chi(h)$, é um caractere de H. Mostre que se $\chi|_H$ é um caractere irredutível de H então χ é um caractere irredutível de G. [Pense na representação associada.]

Seja $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ a representação cujo caractere é igual a χ. Por hipótese, $\rho|_H$ é irredutível, assim os únicos subespaços H-invariantes de V são $\{0\}$ e V. Como H está contido em G, segue que os únicos subespaços G-invariantes de V são $\{0\}$ e V, pois todo subespaço G-invariante é, em particular, H-invariante.

(5) (1 ponto) Seja G um grupo finito e seja $H \leqslant G$. Seja χ um caractere irredutível de G. Mostre que $[\chi|_H, \chi|_H] \leqslant |G : H|$.

$$\begin{aligned}[\chi|_H,\chi|_H] &= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(h)\overline{\chi(h)} = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|\chi(h)|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 = |G:H|\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= |G:H|\cdot[\chi,\chi] = |G:H|.\end{aligned}$$

(6) (3 pontos) Seja G um grupo finito com 9 classes de conjugação, cujos representantes são $x_1,\dots,x_9$. Seja c_i o número de conjugados de x_i para $i=1,\dots,9$. Suponha que G tem a tabela de caracteres da próxima página.

(a) Determine $c_1,\dots,c_9$ e $|G|$.
Pela ortogonalidade das colunas, $|G|=24$, $c_1=c_2=1$, $c_3=2$, $c_4=6$, $c_5=2$, $c_6=6$, $c_7=c_8=c_9=2$

(b) Mostre que G' é cíclico e deduza que G tem um subgrupo normal de ordem 3.
Os elementos do centro são os x_i que admitem um único conjugado, logo $Z(G)=\{x_1,x_2\}$. Como G tem 4 caracteres lineares, $|G/G'|=4$ logo $|G'|=|G|/4=6$. Os x_j contidos em G' são caracterizados pela propriedade $\chi_i(x_j)=1$ para todo $i\in\{1,2,3,4\}$, ou seja são x_1,x_2,x_5,x_9. Em particular $Z(G)=\{x_1,x_2\}\leqslant G'$, logo se $x\in G'$ tem ordem 3 então x_2x tem ordem 6. Como $|G'|=6$ segue que G' é cíclico gerado por x_2x. Se $g\in G$ então $g^{-1}xg$ é um elemento de G' de ordem 3, por outro lado, sendo G' cíclico, os únicos elementos de G' de ordem 3 são x e x^{-1}. Segue que $g^{-1}xg\in\{x,x^{-1}\}$ logo $\langle x\rangle\trianglelefteq G$.

(c) Mostre que G admite três 2-subgrupos de Sylow e que eles são não abelianos.
Seja P um 2-subgrupo de Sylow de G, assim $|P|=8$ sendo $|G|=24$. Se P fosse normal em G, então na tabela de G apareceriam os caracteres irredutíveis de $G/P\cong C_3$ deduzidos por inflação, logo P não é normal em G. Como $|G:P|=3$, segue que $N_G(P)=P$ logo P tem $|G:P|=3$ conjugados em G, ou seja G tem três 2-subgrupos de Sylow. Sabemos pelo item anterior que existe $N\trianglelefteq G$ com $|N|=3$, assim $G/N\cong P$. Se P fosse abeliano, então G' estaria contido em N, e isso é falso pois $|G'|=6>3=|N|$.

(7) (3 pontos) Seja $G:=C_3\rtimes C_4$ onde $C_4=\langle h\rangle$ age sobre $C_3=\langle x\rangle$ pela regra $h^{-1}xh=x^h=x^{-1}$. Encontre representantes das classes de conjugação de G e construa a tabela de caracteres de G.

[Mostre que $h^2\in Z(G)$ e que h, xh^2 e h^3 são dois a dois não conjugados em G, projetando módulo G'.]

	1	6	8	6	3
S_4	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1
f	9	1	9	1	1
χ	4	2	1	0	0
$S^2(\chi)$	10	4	1	0	2

TABELA 1. S_4

Escreva $G = N \rtimes H$ sendo $N = C_3$ e $H = C_4$. Obviamente G não é abeliano, por outro lado $G/N \cong C_4$ é abeliano, logo $G' \leqslant N$. Como $|N| = 3$ e $G' \neq \{1\}$ segue que $G' = N$ e G tem $|G/G'| = 4$ caracteres lineares. Sendo $|G| = 12$, temos que $|G| - 4 = 8$ é uma soma de quadrados de inteiros positivos maiores que 1 (os graus dos caracteres não lineares), e a única forma disso ser possível é $8 = 2^2 + 2^2$, logo G tem $4 + 2 = 6$ caracteres irredutíveis e 6 classes de conjugação. Temos a classe trivial $\{1\}$ e a classe $\{h^2\}$ sendo $h^2 \in Z(G)$. Uma outra classe é $\{x, x^{-1}\}$. Como h, xh^2, h^3 são distintos módulo G', eles não podem ser conjugados em G, logo são representantes das demais classes de conjugação. Podemos construir um caractere irredutível de grau 2 vindo de S_3 observando que $G/\langle h^2 \rangle \cong S_3$. Chamado ele de χ_5, obtemos que $\chi_6 = \chi_5 \chi_2$.

	1	2	3	1	2	3
$C_3 \rtimes C_4$	1	x	h	h^2	xh^2	h^3
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	i	-1	-1	$-i$
χ_3	1	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	1	$-i$	-1	-1	i
χ_5	2	-1	0	2	-1	0
χ_6	2	-1	0	-2	1	0

	1	4	4	3
A_4	1	(123)	(132)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	$e^{i2\pi/3}$	$e^{i4\pi/3}$	1
χ_3	1	$e^{i4\pi/3}$	$e^{i2\pi/3}$	1
χ_4	3	0	0	-1
f	9	9	9	1

Tabela 2. A_4

	1	1	2	6	2	6	2	2	2
G	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1
χ_3	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
χ_4	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	2	-2	0	-1	0	1	1	-1
χ_6	2	2	2	0	-1	0	-1	-1	-1
χ_7	2	-2	0	0	2	0	0	0	-2
χ_8	2	-2	0	0	-1	0	$-i\sqrt{3}$	$i\sqrt{3}$	1
χ_9	2	-2	0	0	-1	0	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	1

Tabela 3. Grupo G do item 6