Prova 2 de Representação de grupos 1, semestre 2023-1.

12 de julho de 2023. Respostas não motivadas não serão consideradas.

A nota da prova 2 será

$$\min\{10, \min\{10, P_2\} + \max\{10, P_1\} - 10\}$$

sendo P_i a soma dos pontos obtidos na prova i, $i = 1, 2$, $0 \leqslant P_i \leqslant 12$. O corpo base é sempre $\mathbb{C}$ e G é sempre um grupo finito.

(1) (1 ponto) Suponha G abeliano e sejam $H \leqslant G$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Mostre que $\chi|_H \in \mathrm{Irr}(H)$.

(2) (1 ponto) Diga se existe G com exatamente 5 caracteres irredutíveis cujos graus são $1, 1, 1, 2, 7$. [Dica: não existe.]

(3) (1 ponto) Seja p um número primo e seja G um p-grupo finito com k classes de conjugação. Mostre que $|G| \equiv k \mod p+1$.

(4) (2 pontos) Considere um grupo G com a tabela de caracteres na próxima página.

(a) Sabendo que G tem 9 subgrupos normais, determine as ordens dos subgrupos normais de G.

(b) Diga se é verdade que todo elemento do subgrupo derivado G' é um comutador. [$g \in G$ é um comutador se e somente se $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g)/\chi(1) \neq 0$.]

(5) (2 pontos) Sejam $H = A_4 < G = S_4$. Calcule ψ^G para todo $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. [Veja a próxima página.]

Seja $g \in G$ e sejam $x_1, \ldots, x_m$ representantes das classes de conjugação de H contidas na classe de conjugação de g em G. Se ψ é um caractere de H, temos

$$\psi^G(g) = |C_G(g)| \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi(x_i)}{|C_H(x_i)|}.$$

(6) (2 pontos) Suponha G abeliano e sejam $H \leqslant G$, $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. Mostre os seguintes fatos.

(a) Existe $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $\chi|_H = \psi$. [Considere uma componente irredutível de ψ^G.]

(b) O conjunto $\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \ : \ \chi|_H = \psi\}$ tem tamanho $|G : H|$. [Pense na decomposição de ψ^G.]

(7) (1 ponto) Seja Z o centro de G e seja $\psi \in \mathrm{Irr}(Z)$. Mostre que $(\psi^G)|_Z = |G : Z| \cdot \psi$.

(8) (2 pontos) Escrevendo $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$, suponha que $\chi_j(1) \neq \chi_k(1)$ para todo $j = 1, \ldots, k-1$. Suponha que $G' \neq G$ e seja $g \in G$ tal que $g \notin G'$. Mostre os seguintes fatos.

(a) Existe $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $\chi_i(g) \neq 1$ e $\chi_i(1) = 1$.

(b) $\chi_k(g) = 0$.

	1	6	8	6	3
S_4	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1
ψ_1^G					
ψ_2^G					
ψ_3^G					
ψ_4^G					

Tabela 1. S_4

	1	4	4	3
A_4	1	(123)	(132)	(12)(34)
ψ_1	1	1	1	1
ψ_2	1	θ	θ^2	1
ψ_3	1	θ^2	θ	1
ψ_4	3	0	0	-1

Tabela 2. A_4 $(\theta = e^{i2\pi/3}, \quad \theta + \theta^2 = -1)$

	1	1	2	6	2	6	2	2	2
G	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1
χ_3	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
χ_4	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	2	-2	0	-1	0	1	1	-1
χ_6	2	2	2	0	-1	0	-1	-1	-1
χ_7	2	-2	0	0	2	0	0	0	-2
χ_8	2	-2	0	0	-1	0	$-i\sqrt{3}$	$i\sqrt{3}$	1
χ_9	2	-2	0	0	-1	0	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	1

Tabela 3. Grupo G do item 4, $|G| = 24$