Prova 2 de Representação de grupos 1, semestre 2023-1.

Resolução.

(1) (1 ponto) Suponha G abeliano e sejam $H \leqslant G$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Mostre que $\chi|_H \in \mathrm{Irr}(H)$.

Observe que $\chi_H(1) = \chi(1) = 1$, pois em um grupo abeliano todos os caracteres irredutíveis são lineares. Segue que $\chi|_H$ é um caractere linear, logo é irredutível.

(2) (1 ponto) Diga se existe G com exatamente 5 caracteres irredutíveis cujos graus são $1, 1, 1, 2, 7$. [Dica: não existe.]

Não: se G existisse, então $|G| = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 7^2 = 56$ e $|G : G'| = 3$, por outro lado 3 não divide 56. Isso contradiz o teorema de Lagrange.

(3) (1 ponto) Seja p um número primo e seja G um p-grupo finito com k classes de conjugação. Mostre que $|G| \equiv k \mod p+1$.

Observe que $p^2 \equiv 1 \mod p+1$ sendo $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Segue que, se $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, então $\chi(1)^2 \equiv 1 \mod p+1$, pois $\chi(1)$ divide $|G|$ logo é uma potência de p. Reduzindo módulo $p+1$,

$$|G| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 \equiv \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} 1 = k.$$

(4) (2 pontos) Considere um grupo G com a tabela de caracteres na próxima página.

(a) Sabendo que G tem 9 subgrupos normais, determine as ordens dos subgrupos normais de G.

Os núcleos $N_i = \ker(\chi_i)$ são

- $N_1 = G$, $|N_1| = 24$.
- $N_2 = x_1^G \cup x_2^G \cup x_3^G \cup x_5^G \cup x_7^G \cup x_8^G \cup x_9^G$, $|N_2| = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$.
- $N_3 = x_1^G \cup x_2^G \cup x_4^G \cup x_5^G \cup x_9^G$, $|N_3| = 1+1+6+2+2 = 12$.
- $N_4 = x_1^G \cup x_2^G \cup x_5^G \cup x_6^G \cup x_9^G$, $|N_4| = 1+1+2+6+2 = 12$.
- $N_5 = x_1^G \cup x_2^G$, $|N_5| = 1 + 1 = 2$.
- $N_6 = x_1^G \cup x_2^G \cup x_3^G$, $|N_6| = 1 + 1 + 2 = 4$.
- $N_7 = x_1^G \cup x_5^G$, $|N_7| = 1 + 2 = 3$.
- $N_8 = N_9 = x_1^G = \{1\}$.

Temos $G' = x_1^G \cup x_2^G \cup x_5^G \cup x_9^G = N_2 \cap N_3$, $N_5 = Z(G)$. Temos 9 subgrupos normais, que são $N_1, \ldots, N_8$ e $N_2 \cap N_3 = G'$. Como G tem $|G : G'| = 4$ caracteres lineares, segue que $|G'| = 24/4 = 6$.

(b) Diga se é verdade que todo elemento do subgrupo derivado G' é um comutador. [$g \in G$ é um comutador se e somente se $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g)/\chi(1) \neq 0$.]

Seja $u_i = \sum_{j=1}^{9} \chi_j(x_i)/\chi_j(1)$ para $i = 1, \dots, 9$. Temos

$$u_3 = u_4 = u_6 = u_7 = u_8 = 0,$$
$$u_1 = 9,\ u_2 = 3,\ u_5 = 3,\ u_9 = 3.$$

Os únicos x_i que são comutadores são x_1, x_2, x_5, x_9, que são exatamente os elementos que satisfazem $\chi_j(x_i) = 1$ para todo $j = 1, 2, 3, 4$, ou seja os x_i que pertencem a G'. Como um conjugado de um comutador é um comutador, segue que todos os elementos de G' são comutadores.

(5) (2 pontos) Sejam $H = A_4 < G = S_4$. Calcule ψ^G para todo $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. [Veja a próxima página.]

Seja $g \in G$ e sejam $x_1, \dots, x_m$ representantes das classes de conjugação de H contidas na classe de conjugação de g em G. Se ψ é um caractere de H, temos

$$\psi^G(g) = |C_G(g)| \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi(x_i)}{|C_H(x_i)|}.$$

Seja $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. Temos $\psi^G(1) = |G : H| \cdot \psi(1)$ e $\psi^G(g) = 0$ para todo $g \in G - H$. Falta calcular $\psi^G(g)$ para $g = (123)$ e $g = (12)(34)$. No primeiro caso temos $m = 2$ e $|C_G(g)| = |C_H(g)| = 3$ logo $\psi^G(g) = \psi(g) + \psi(g^{-1})$. No segundo caso temos $m = 1$ e $|C_G(g)| = 8$, $|C_H(g)| = 4$ logo $\psi^G(g) = 2\psi(g)$. Veja a tabela preenchida.

(6) (2 pontos) Suponha G abeliano e sejam $H \leqslant G$, $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. Mostre os seguintes fatos.

(a) Existe $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $\chi|_H = \psi$. [Considere uma componente irredutível de ψ^G.]
Seja χ uma componente irredutível de ψ^G, então $0 < [\psi^G, \chi] = [\psi, \chi|_H]$, por outro lado $\chi|_H(1) = \chi(1) = 1$ logo $\chi|_H$ é irredutível logo $\chi|_H = \psi$.

(b) O conjunto $\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \ :\ \chi|_H = \psi\}$ tem tamanho $|G : H|$. [Pense na decomposição de ψ^G.]
Se $\chi|_H = \psi$ então $1 = [\chi|_H, \psi] = [\chi, \psi^G]$ logo os χ que restringem para ψ são exatamente as componentes irredutíveis de ψ^G, além disso cada componente irredutível de ψ^G aparece exatamente uma vez, sendo $[\chi, \psi^G] = 1$. Por outro lado elas são todas lineares logo ψ^G admite exatamente $\psi^G(1) = |G : H|$ componentes irredutíveis. Segue que ψ admite exatamente $|G : H|$ extensões.

(7) (1 ponto) Seja Z o centro de G e seja $\psi \in \mathrm{Irr}(Z)$. Mostre que $(\psi^G)|_Z = |G : Z| \cdot \psi$.

Se $z \in Z$, temos

$$\psi^G(z) = \frac{1}{|Z|}\sum_{x \in G} \psi^\circ(xzx^{-1}) = \frac{1}{|Z|}\sum_{x \in G} \psi^\circ(z) = |G:Z| \cdot \psi(z).$$

(8) (2 pontos) Escrevendo $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$, suponha que $\chi_j(1) \neq \chi_k(1)$ para todo $j = 1, \dots, k-1$. Suponha que $G' \neq G$ e seja $g \in G$ tal que $g \notin G'$. Mostre os seguintes fatos.

(a) Existe $i \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $\chi_i(g) \neq 1$ e $\chi_i(1) = 1$.
Se $\chi_i(g) = 1$ toda vez que $\chi_i(1) = 1$ então g pertence ao núcleo de todos os caracteres lineares de G, ou seja $g \in G'$, uma contradição.

(b) $\chi_k(g) = 0$.
O produto entre um caractere irredutível e um caractere linear é um caractere irredutível, logo $\chi_k\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$. Mas sendo $\chi_k(1)\chi_i(1) = \chi_k(1)$, os caracteres irredutíveis χ_k, $\chi_k\chi_i$ têm o mesmo grau. Pela hipótese, isso implica que $\chi_k\chi_i = \chi_k$. Avaliando em g temos $\chi_k(g) \cdot (\chi_i(g) - 1) = 0$. Como $\chi_i(g) \neq 1$, deduzimos que $\chi_k(g) = 0$.

	1	6	8	6	3
S_4	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1
ψ_1^G	2	0	2	0	2
ψ_2^G	2	0	-1	0	2
ψ_3^G	2	0	-1	0	2
ψ_4^G	6	0	0	0	-2

Tabela 1. S_4

	1	4	4	3
A_4	1	(123)	(132)	(12)(34)
ψ_1	1	1	1	1
ψ_2	1	θ	θ^2	1
ψ_3	1	θ^2	θ	1
ψ_4	3	0	0	-1

Tabela 2. A_4 ($\theta = e^{i2\pi/3}, \quad \theta + \theta^2 = -1$)

	1	1	2	6	2	6	2	2	2
G	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1
χ_3	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
χ_4	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	2	-2	0	-1	0	1	1	-1
χ_6	2	2	2	0	-1	0	-1	-1	-1
χ_7	2	-2	0	0	2	0	0	0	-2
χ_8	2	-2	0	0	-1	0	$-i\sqrt{3}$	$i\sqrt{3}$	1
χ_9	2	-2	0	0	-1	0	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$	1

Tabela 3. Grupo G do item 4, $|G| = 24$