Prova 2 Tema A Gabarito IAL Turma 5 18/08/2022

Sejam

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cada item vale 1 ponto.

1. Calcule $v_1 + v_2 + v_3$.

$$v_1+v_2+v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3+3 \\ -1+2+7 \\ -1+1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$ porque o determinante da matriz A cujas colunas são v_1, v_2, v_3 é igual a zero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 10 - 21 - 3 + 6 + 15 - 7 = 0.$$

Calculei o determinante usando a regra de Sarrus para matrizes 3×3.

3. Calcule a dimensão de $[v_1, v_2, v_3]$. A dimensão de $[v_1, v_2, v_3]$ é o posto da matriz A do item anterior,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III+I}]{\text{II+I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III/4}]{\text{II/5}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue que $\dim([v_1, v_2, v_3]) = 2$ pois tem 2 elementos líderes.

4. Encontre uma base de $[v_2, v_4]^\perp \leq \mathbb{R}^3$. Um vetor (x_1, x_2, x_3) pertence a $[v_2, v_4]^\perp$ se e somente se é ortogonal a v_2 e a v_4, ou seja o seu produto escalar com v_2 e v_4 é 0, ou seja

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Fazendo a primeira linha menos a segunda multiplicada por 3 temos $-x_2 + 7x_3 = 0$ e fazendo $x_3 = t$ temos $x_2 = 7t$ e $x_1 = 2t - 7t = -5t$, ou seja $(x_1, x_2, x_3) = (-5t, 7t, t) = t(-5, 7, 1)$. Segue que uma base de $[v_2, v_4]^\perp$ é $\{(-5, 7, 1)\}$.

5. Encontre uma base ortogonal de $[v_2, v_4]$. Usando o algoritmo de Gram-Schmidt temos $u_1 = v_2$ e

$$u_2 = v_4 - \frac{u_1 \cdot v_4}{u_1 \cdot u_1} u_1 = v_4 - \frac{3}{14} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -31 \end{pmatrix}.$$

Uma base ortogonal de $[v_2, v_4]$ é $\{u_1, 14u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -31 \end{pmatrix} \right\}$.

6. Encontre um sistema linear homogêneo cujo espaço-solução é $[v_1, v_2]$. $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ pertence a $[v_1, v_2]$ se e somente se x é combinação linear de v_1, v_2, ou seja v_1, v_2, x são l.d., ou seja o determinante cujas colunas são v_1, v_2, x é igual a zero, ou seja

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ -1 & 2 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = 2x_3 - 3x_2 - x_1 + 2x_1 + 3x_3 - x_2 = x_1 - 4x_2 + 5x_3,$$

ou seja $[v_1, v_2]$ é o espaço-solução da equação $x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$.

7. É possível escrever v_3 como combinação linear de v_1 e v_2? Sim, porque v_1, v_2 são l.i. e v_1, v_2, v_3 são l.d., pois o determinante da matriz A do item 2 é igual a zero. Explicitamente, podemos resolver o sistema $Ax = 0$ a partir da matriz escalonada no item 3 obtendo $x_3 = t$, $x_2 = -2t$, $x_1 = -3x_2 - 3t = 6t - 3t = 3t$, e pondo $t = 1$ obtemos a solução não trivial $(x_1, x_2, x_3) = (3, -2, 1)$. Em outras palavras $3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$, ou seja $v_3 = -3v_1 + 2v_2$.

8. Calcule $\det(A^T A)$, sendo A a matriz 3×3 cujas colunas são v_1, v_2, v_3 (nesta ordem). A e A^T são matrizes quadradas e vimos no item 2 que $\det(A) = 0$, logo $\det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A^T) \cdot 0 = 0$.

9. Calcule a projeção ortogonal de v_3 sobre $[v_1]$. Seja A a matriz cuja única coluna é v_1, então a projeção ortogonal é $p = A(A^T A)^{-1} A^T v_3$, ou seja

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10. Calcule o posto de $\begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \end{pmatrix}$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Escalonando,

$$\begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{\mathrm{III} - \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} - h\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 1 - h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A primeira linha é sempre não nula, logo o posto de A é sempre maior ou igual a 1. Se $1 - h^2 = 0$, ou seja $h = \pm 1$, então a segunda linha é nula logo o posto é 1. Por outro lado se $1 - h^2 \neq 0$, ou seja $h \neq \pm 1$, então na segunda linha aparece um elemento líder, logo o posto é 2.

Prova 2 Tema B Gabarito IAL Turma 5 18/08/2022

Sejam

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Cada item vale 1 ponto.

1. Calcule $v_1 + v_2 + v_3$.

$$v_1+v_2+v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3+3 \\ -1+2+7 \\ -2-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$ porque o determinante da matriz A cujas colunas são v_1, v_2, v_3 é igual a zero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 42 + 6 + 12 + 6 + 14 = 0.$$

Calculei o determinante usando a regra de Sarrus para matrizes 3×3.

3. Calcule a dimensão de $[v_1, v_2, v_3]$. A dimensão de $[v_1, v_2, v_3]$ é o posto da matriz A do item anterior,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}/4]{\text{II}/5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue que $\dim([v_1, v_2, v_3]) = 2$ pois tem 2 elementos líderes.

4. Encontre uma base de $[v_2, v_4]^\perp \leq \mathbb{R}^3$. Um vetor (x_1, x_2, x_3) pertence a $[v_2, v_4]^\perp$ se e somente se é ortogonal a v_2 e a v_4, ou seja o seu produto escalar com v_2 e v_4 é 0, ou seja

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Fazendo a primeira linha menos a segunda multiplicada por 3 temos $-x_2 + 7x_3 = 0$ e fazendo $x_3 = t$ temos $x_2 = 7t$ e $x_1 = 3t - 7t = -4t$, ou seja $(x_1, x_2, x_3) = (-4t, 7t, t) = t(-4, 7, 1)$. Segue que uma base de $[v_2, v_4]^\perp$ é $\{(-4, 7, 1)\}$.

5. Encontre uma base ortogonal de $[v_1, v_2]$. Usando o algoritmo de Gram-Schmidt temos $u_1 = v_1$ e

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = v_2 - \frac{5}{6} v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Uma base ortogonal de $[v_1, v_2]$ é $\{u_1, 6u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

6. Encontre um sistema linear homogêneo cujo espaço-solução é $[v_1, v_2]$. $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ pertence a $[v_1, v_2]$ se e somente se x é combinação linear de v_1, v_2, ou seja v_1, v_2, x são l.d., ou seja o determinante cujas colunas são v_1, v_2, x é igual a zero, ou seja

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ -1 & 2 & x_2 \\ -2 & -2 & x_3 \end{pmatrix} = 2x_3 - 6x_2 + 2x_1 + 4x_1 + 3x_3 + 2x_2 = 6x_1 - 4x_2 + 5x_3,$$

ou seja $[v_1, v_2]$ é o espaço-solução da equação $6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$.

7. É possível escrever v_3 como combinação linear de v_1 e v_2? Sim, porque v_1, v_2 são l.i. e v_1, v_2, v_3 são l.d., pois o determinante da matriz A do item 2 é igual a zero. Explicitamente, podemos resolver o sistema $Ax = 0$ a partir da matriz escalonada no item 3 obtendo $x_3 = t$, $x_2 = -2t$, $x_1 = -3x_2 - 3t = 6t - 3t = 3t$, e pondo $t = 1$ obtemos a solução não trivial $(x_1, x_2, x_3) = (3, -2, 1)$. Em outras palavras $3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$, ou seja $v_3 = -3v_1 + 2v_2$.

8. Calcule $\det(A^T A)$, sendo A a matriz 3×3 cujas colunas são v_1, v_2, v_3 (nesta ordem). A e A^T são matrizes quadradas e vimos no item 2 que $\det(A) = 0$, logo $\det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A^T) \cdot 0 = 0$.

9. Calcule a projeção ortogonal de v_3 sobre $[v_1]$. Seja A a matriz cuja única coluna é v_1, então a projeção ortogonal é $p = A(A^T A)^{-1} A^T v_3$, ou seja

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{8}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}.$$

10. Calcule o posto de $\begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \end{pmatrix}$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Escalonando,

$$\begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-h\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 1-h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A primeira linha é sempre não nula, logo o posto de A é sempre maior ou igual a 1. Se $1 - h^2 = 0$, ou seja $h = \pm 1$, então a segunda linha é nula logo o posto é 1. Por outro lado se $1 - h^2 \neq 0$, ou seja $h \neq \pm 1$, então na segunda linha aparece um elemento líder, logo o posto é 2.