Prova 3 Tema A **IAL Turma 5** **15/09/2022**

Nome e matrícula: ....

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (2 pontos) Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x-y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}.$$

   (a) Encontre uma matriz A de formato 3×3 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

   (b) Encontre uma base do núcleo de T.

2. (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Encontre uma matriz A de formato 2×2 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

3. (3 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que o polinômio característico de A é

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda.$$

   (b) Calcule os autovalores de A.

   (c) Mostre que A é diagonalizável e encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

4. (3 pontos) Para cada uma das seguintes matrizes, diga se é diagonalizável.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (1 ponto) Se uma matriz quadrada A, de formato 3×3, tem polinômio característico igual a $-\lambda^3 + \lambda - 3$, quanto vale o determinante de A?

Prova 3 Tema B **IAL Turma 5** **15/09/2022**

Nome e matrícula: ....

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

1. (2 pontos) Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ x+y-z \end{pmatrix}.$$

   (a) Encontre uma matriz A de formato 3×3 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

   (b) Encontre uma base do núcleo de T.

2. (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Encontre uma matriz A de formato 2×2 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

3. (3 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que o polinômio característico de A é

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda.$$

   (b) Calcule os autovalores de A.

   (c) Mostre que A é diagonalizável e encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

4. (3 pontos) Para cada uma das seguintes matrizes, diga se é diagonalizável.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (1 ponto) Se uma matriz quadrada A, de formato 3×3, tem polinômio característico igual a $-\lambda^3 + \lambda - 2$, quanto vale o determinante de A?