Prova 3 Tema A IAL (2022-1) **Gabarito**

(1) (2 pontos) Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x-y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre uma matriz A de formato 3×3 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x-y+z \\ x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) Encontre uma base do núcleo de T.
Precisamos resolver o sistema $Ax = 0$ sendo A a matriz do item anterior, ou seja precisamos resolver a equação $x - y + z = 0$. Pondo $t = y$ e $s = z$ obtemos que $x = t - s$ logo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue que uma base do núcleo de T é

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz A de formato 2×2 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Temos as condições

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}.$$

Segue que $b = 1$, $d = -1$, $a+b = 0$ e $c+d = 1$, logo $a = -1$ e $c = 1-d = 2$.
Segue que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) (3 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que o polinômio característico de A é

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda.$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = \det &\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)^2 + 2 - 2(1-\lambda) + 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 2 - 2 + 2\lambda + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3). \end{aligned}$$

(b) Calcule os autovalores de A.
As duas raízes de $\lambda^2 - 2\lambda - 3$ são $\frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4+12}) = \frac{1}{2}(2 \pm 4)$ ou seja são -1 e 3. Segue que

$$P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$$

logo os autovalores de A são 0, -1 e 3.

(c) Mostre que A é diagonalizável e encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.
Pelo item anterior, os autovalores de A são 0, -1 e 3 e as multiplicidades algébricas são $m_a(0) = 1$, $m_a(-1) = 1$ e $m_a(3) = 1$, todas iguais a 1, logo A é diagonalizável. Os autoespaços são

$$P_0 = \ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right],$$

$$P_{-1} = \ker(A + \mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$P_3 = \ker(A - 3\mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

Segue que $P^{-1}AP = D$ sendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4) (3 pontos) Para cada uma das seguintes matrizes, diga se é diagonalizável.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos $P_A(\lambda) = -\lambda(4-\lambda) + 4 = (\lambda-2)^2$ e $P_2 = \ker(A - 2\mathbb{1}_2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$ tem dimensão 1, logo $m_a(2) = 2$ e $m_g(2) = 1$ e A não é diagonalizável.

Temos $P_B(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$ logo os autovalores são 2 e -2 e as multiplicidades algébricas são iguais a 1, logo B é diagonalizável.

Temos $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^3$ logo o único autovalor de C é 1 e a sua multiplicidade algébrica é $m_a(1) = 3$. A sua multiplicidade geométrica é

$m_g(1) = \dim\ker(A - \mathbb{1}_3) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3 - 2 = 1$ pois o posto é 2. Segue que $m_g(1) = 1 \neq 3 = m_a(1)$ logo C não é diagonalizável.

(5) (1 ponto) Se uma matriz quadrada A, de formato 3×3, tem polinômio característico igual a $-\lambda^3 + \lambda - 3$, quanto vale o determinante de A?

O polinômio característico é $P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + \lambda - 3$, logo $\det(A) = \det(A - 0\mathbb{1}_3) = P(0) = -3$.

Prova 3 Tema B IAL (2022-1) Gabarito

(1) (2 pontos) Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ x+y-z \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre uma matriz A de formato 3×3 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) Encontre uma base do núcleo de T.

Precisamos resolver o sistema $Ax = 0$ sendo A a matriz do item anterior, ou seja precisamos resolver a equação $x + y - z = 0$. Pondo $t = y$ e $s = z$ obtemos que $x = s - t$ logo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue que uma base do núcleo de T é

$$B = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(2) (1 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz A de formato 2×2 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Temos as condições

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}.$$

Segue que $b = -1$, $d = 1$, $a + b = 0$ e $c + d = 1$, logo $a = 1$ e $c = 1 - d = 0$. Segue que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) (3 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que o polinômio característico de A é

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda.$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ = -\lambda(1-\lambda)^2 + 2 + 2\lambda - 2(1-\lambda) \\ = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 2 + 2\lambda - 2 + 2\lambda \\ = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3). \end{aligned}$$

(b) Calcule os autovalores de A.
As duas raízes de $\lambda^2 - 2\lambda - 3$ são $\frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4+12}) = \frac{1}{2}(2 \pm 4)$ ou seja são -1 e 3. Segue que

$$P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-3).$$

Segue que os autovalores de A são 0, -1 e 3.

(c) Mostre que A é diagonalizável e encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.
Pelo item anterior, os autovalores de A são 0, -1 e 3 e as multiplicidades algébricas são $m_a(0) = 1$, $m_a(-1) = 1$ e $m_a(3) = 1$, todas iguais a 1, logo A é diagonalizável. Os autoespaços são

$$P_0 = \ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right],$$

$$P_{-1} = \ker(A + \mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right],$$

$$P_3 = \ker(A - 3\mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Segue que $P^{-1}AP = D$ sendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4) (3 pontos) Para cada uma das seguintes matrizes, diga se é diagonalizável.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos $P_A(\lambda) = -\lambda(4-\lambda)+3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3)$ logo os autovalores são 1 e 3 e as multiplicidades algébricas são iguais a 1, logo A é diagonalizável.

Temos $P_B(\lambda) = (2-\lambda)^2$ logo o único autovalor é 2 e a sua multiplicidade algébrica vale $m_a(2) = 2$. A sua multiplicidade geométrica é $m_g(2) = \dim\ker(A - 2\mathbb{1}_2) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2-1 = 1$ pois o posto é 1. Segue que $m_g(2) = 1 \neq 2 = m_a(2)$ logo B não é diagonalizável.

Temos $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^3$ logo o único autovalor de C é 1 e a sua multiplicidade algébrica é $m_a(1) = 3$. A sua multiplicidade geométrica é $m_g(1) = \dim\ker(A-\mathbb{1}_3) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3-2 = 1$ pois o posto é 2. Segue que $m_g(1) = 1 \neq 3 = m_a(1)$ logo C não é diagonalizável.

(5) (1 ponto) Se uma matriz quadrada A, de formato 3×3, tem polinômio característico igual a $-\lambda^3 + \lambda - 2$, quanto vale o determinante de A?

O polinômio característico é $P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + \lambda - 2$, logo $\det(A) = \det(A - 0\mathbb{1}_3) = P(0) = -2$.