Prova 1 - Grupos Clássicos - 20/10/2023

Nome e matrícula: ....

F é um corpo e V é um espaço vetorial sobre F de dimensão finita. A base simplética usual (associada a uma forma bilinear alternada não degenerada) é $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m$ tal que $B(e_i, e_j) = 0 = B(f_i, f_j)$, $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Aqui δ_{ij} vale 0 se $i \neq j$, e $\delta_{ii} = 1$. O índice de Witt de um espaço formado (V, B) é a maior dimensão de um subespaço totalmente isotrópico de V.

A nota da prova será o mínimo entre 10 *e a soma dos pontos obtidos.*

(1) (1 ponto) Determine o centralizador de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ em $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

(2) (1 ponto) Mostre que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ e $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ não são isomorfos.

(3) (1 ponto) Mostre que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

(4) (2 pontos) Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre o corpo F. Defina a seguinte forma bilinear simétrica $V \times V \to F$.

$$B : V \times V \to F, \qquad B(X, Y) := \mathrm{Tr}(X \cdot Y)$$

onde $\mathrm{Tr}(A)$ é o traço (a soma dos elementos diagonais) da matriz A.

(a) Seja e_{ij} a matriz 2×2 que tem 1 na posição (i, j) e 0 nas outras posições. Sejam $A_1 = e_{11}$, $A_2 = e_{12}$, $A_3 = e_{21}$, $A_4 = e_{22}$. Calcule $B(A_i, A_j)$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Suponha $F = \mathbb{F}_5$. Mostre que o índice de Witt é 2.

(5) (1 ponto) Seja B uma forma bilinear alternada não degenerada definida no espaço vetorial V. Se U, W são subespaços não degenerados de V, $U \cap W$ é não degenerado? Se sim, demonstre. Se não, encontre um contra-exemplo.

(6) (1 ponto) Sejam $F = \mathbb{F}_7$, $V = F^2$. Diga se a forma simétrica $B(u, v) := u^t \cdot v$, definida em V, admite vetores isotrópicos.

(7) (3 pontos) Seja $G = \mathrm{Sp}(V)$ o grupo simplético associado à forma bilinear alternada não degenerada B. Dado $v \in V$, defina o estabilizador de v em G como sendo $\mathrm{Stab}_G(v) = \{g \in G \ : \ g(v) = v\}$.

(a) Suponha $n = 4$. Determine uma base do espaço $\langle e_1 + f_2 \rangle^\perp$.

(b) Seja $g \in \mathrm{Stab}_G(e_1)$. Mostre que $g(f_1) - f_1 \in \langle e_1 \rangle^\perp$.

(c) É verdade que $\mathrm{Stab}_G(e_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Stab}_G(e_m) = \{1\}$?

(8) (3 pontos) Sejam $S := \mathrm{Sp}(V)$, $G := \mathrm{GL}(V)$. O dual de V é o conjunto V^* das funções lineares $V \to F$. Uma transveção é um elemento $t = \tau_{u,\varphi} \in G$ definido por $t(v) := v + \varphi(v)u$ onde $0 \neq u \in V$ e $0 \neq \varphi \in V^*$ satisfazem $\varphi(u) = 0$. Lembre-se que $t \in S$ se e somente se $\varphi(v) = a \cdot B(v, u)$ para todo $v \in V$, onde $0 \neq a \in F$.

(a) Dada uma transveção $t = \tau_{u,\varphi}$ e $g \in G$, mostre que gtg^{-1} é uma transveção determinando $w \in V$ e $\psi \in V^*$ tais que $gtg^{-1} = \tau_{w,\psi}$.

(b) Um elemento $g \in G$ é uma semelhança se existe $\lambda_g \in F$ tal que $B(g(u), g(v)) = \lambda_g B(u, v)$ para todo $u, v \in V$. Suponha $\dim(V) \geqslant 4$. Existe $g \in G$ que não é uma semelhança?

(c) Mostre que S não é normal em G se $\dim(V) \geqslant 4$.